Pondelok, 18. júl, 2011

Úloha 1. Pre ľubovoľnú množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ obsahujúcu štyri rôzne kladné celé čísla položme $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Označme n_A počet takých dvojíc (i, j) spĺňajúcich $1 \le i < j \le 4$, pre ktoré je číslo $a_i + a_j$ deliteľom čísla s_A. Určte všetky množiny A obsahujúce štyri rôzne kladné celé čísla, pre ktoré je hodnota n_A najväčšia možná.

Úloha 2. Daná je konečná množina $\mathcal{S}$ aspoň dvoch bodov v rovine, pričom žiadne tri body množiny $\mathcal{S}$ neležia na jednej priamke. Pojmom *veterný mlyn* rozumieme proces, ktorý začína ľubovoľnou priamkou ℓ prechádzajúcou práve jedným bodom P množiny $\mathcal{S}$. Táto priamka sa otáča v smere hodinových ručičiek okolo *pivota* P, až kým po prvýkrát neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Tento bod, označme ho Q, sa stáva novým pivotom, t. j. priamka sa ďalej otáča v smere hodinových ručičiek okolo bodu Q, až kým neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Uvedený proces pokračuje donekonečna.
Dokážte, že sa dá vybrať bod $P \in \mathcal{S}$ a priamka ℓ prechádzajúca bodom P tak, že pre príslušný veterný mlyn je každý bod množiny $\mathcal{S}$ pivotom nekonečne veľa krát.

Úloha 3. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia z množiny reálnych čísel do množiny reálnych čísel spĺňajúca

$$f(x + y) \le y f(x) + f(f(x))$$

pre všetky reálne čísla x a y. Dokážte, že $f(x) = 0$ pre všetky $x \le 0$.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

Utorok, 19. júl, 2011

Úloha 4. Nech $n > 0$ je celé číslo. K dispozícii máme rovnoramenné váhy a n závaží s hmotnosťami $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Jednotlivé závažia máme v nejakom poradí ukladať na misky váh tak, aby obsah pravej misky nebol v žiadnom okamihu ťažší ako obsah ľavej misky. V každom kroku vyberieme jedno zo závaží, ktoré ešte nie je na váhach, a položíme ho buď na ľavú alebo na pravú misku váh. Tak postupujeme, kým neminieme všetky závažia.
Určte, koľkými spôsobmi to celé môžeme urobiť.

Úloha 5. Nech f je funkcia z množiny celých čísel do množiny kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre ľubovoľné dve celé čísla m a n je rozdiel $f(m)-f(n)$ deliteľný číslom $f(m-n)$. Dokážte, že pre každé dve celé čísla m a n také, že $f(m) \leq f(n)$, je číslo $f(n)$ deliteľné číslom $f(m)$.

Úloha 6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC a kružnica Γ jemu opísaná. Nech ℓ je dotyčnica kružnice Γ a nech ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c sú obrazy priamky ℓ v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA, AB. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku určenému priamkami ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c sa dotýka kružnice Γ.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.