



Streda, 7. júl 2010

Úloha 1. Určte všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$f(\lfloor xy \rfloor) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (Symbol $\lfloor z \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako z .)

Úloha 2. Označme I stred vpísanej kružnice a Γ opísanú kružnicu trojuholníka ABC . Priamka AI pretína kružnicu Γ v bode D ($D \neq A$). Nech E je bod na oblúku BDC a F bod na strane BC , pričom

$$|\angle BAF| = |\angle CAE| < \frac{1}{2}|\angle BAC|.$$

Označme G stred úsečky IF . Dokážte, že priamky DG a EI sa pretínajú na kružnici Γ .

Úloha 3. Nech \mathbb{N} je množina všetkých kladných celých čísel. Určte všetky funkcie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

je štvorcem celého čísla pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$.



Štvrtok, 8. júl 2010

Úloha 4. Nech P je vnútorný bod trojuholníka ABC . Priamky AP , BP , CP pretínajú kružnicu Γ opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch K , L , M (rôznych od A , B , C). Dotyčnica ku kružnici Γ v bode C pretína priamku AB v bode S . Predpokladajme, že $|SC| = |SP|$. Dokážte, že $|MK| = |ML|$.

Úloha 5. V každej zo šiestich truhlíc $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ je na začiatku jedna minca. Dovoľené sú dva typy operácií:

Typ 1: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_j pre nejaké $1 \leq j \leq 5$. Odoberieme jednu mincu z B_j a pridáme dve mince do B_{j+1} .

Typ 2: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_k pre nejaké $1 \leq k \leq 4$. Odoberieme jednu mincu z B_k a vymeníme navzájom obsah truhlíc B_{k+1} a B_{k+2} (ktoré môžu byť aj prázdne).

Zistite, či existuje konečná postupnosť operácií taká, že po jej vykonaní budú truhlice B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prázdne a truhlica B_6 bude obsahovať presne $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Platí $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Úloha 6. Nech a_1, a_2, a_3, \dots je postupnosť kladných reálnych čísel. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo s také, že pre všetky $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} ; 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Dokážte, že existujú kladné celé čísla ℓ a N také, že $\ell \leq s$ a pre všetky $n \geq N$ platí $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$.