

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Streda, 16. júl 2008

Úloha 1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H priesečník jeho výšok. Kružnica so stredom v strede strany BC prechádzajúca bodom H pretína priamku BC v bodoch A_1 a A_2 . Podobne kružnica so stredom v strede strany CA predchádzajúca bodom H pretína priamku CA v bodoch B_1 a B_2 a kružnica so stredom v strede strany AB predchádzajúca bodom H pretína priamku AB v bodoch C_1 a C_2 . Dokážte, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ležia na jednej kružnici.

Úloha 2. (a) Dokážte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

pre všetky reálne čísla x, y, z rôzne od 1 spĺňajúce $xyz = 1$.

(b) Dokážte, že v uvedenej nerovnosti platí rovnosť pre nekonečne veľa trojíc racionálnych čísel x, y, z rôznych od 1 spĺňajúcich $xyz = 1$.

Úloha 3. Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že $n^2 + 1$ má prvočíselného deliteľa väčšieho ako $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Štvrtok, 17. júl 2008

Úloha 4. Nájdite všetky funkcie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (t. j. funkcie z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel) také, že

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pre všetky kladné reálne čísla w, x, y, z spĺňajúce $wx = yz$.

Úloha 5. Nech n a k sú kladné celé čísla, kde $k \geq n$ a $k - n$ je párne číslo. Daných je $2n$ lámip označených $1, 2, \dots, 2n$, pričom každá z nich môže byť buď *zapnutá* alebo *vypnutá*. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. Uvažujeme postupnosti *krokov*: v každom kroku jednu z lámip prepne (zo zapnutej na vypnutú alebo z vypnutej na zapnutú).

Nech N je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n + 1$ po $2n$ sú vypnuté.

Nech M je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n + 1$ po $2n$ sú vypnuté, pričom žiadna z lámip od $n + 1$ po $2n$ nebola nikdy zapnutá.

Určte podiel N/M .

Úloha 6. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom $|BA| \neq |BC|$. Označme postupne ω_1 a ω_2 kružnice vpísané do trojuholníkov ABC a ADC . Predpokladajme, že existuje kružnica ω dotýkajúca sa polpriamky BA za bodom A a polpriamky BC za bodom C , ktorá sa dotýka aj priamok AD a CD . Dokážte, že spoločné vonkajšie dotyčnice kružníc ω_1 a ω_2 sa pretínajú na kružnici ω .