Version: Slovak

Prvý deň

25. júl 2007

Úloha 1. Dané sú reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pre každé i $(1 \leq i \leq n)$ definujme

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Nech

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ platí nerovnosť

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Ukážte, že existujú také reálne čísla $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, že v $(*)$ nastane rovnosť.

Úloha 2. Uvažujme päť takých bodov A, B, C, D, E, že $ABCD$ je rovnobežník a štvoruholník $BCED$ je tetivový. Priamka ℓ prechádza bodom A, pričom pretína úsečku DC v jej vnútornom bode F a priamku BC v bode G. Predpokladajme, že $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokážte, že priamka ℓ je osou uhla DAB.

Úloha 3. Niektorí účastníci matematickej súťaže sú priatelia. Priateľstvo je vzájomné. Skupinu súťažiacich nazveme *klika*, ak každí dvaja z nich sú priatelia. (Špeciálne, ľubovoľná skupina pozostávajúca z menej ako dvoch súťažiacich je klika.) Počet členov kliky nazveme jej *rozmerom*.

Vieme, že najväčší rozmer kliky pozostávajúcej z účastníkov súťaže je párne číslo. Dokážte, že všetkých súťažiacich možno rozsadiť do dvoch miestností tak, aby najväčší rozmer kliky v jednej miestnosti sa rovnal najväčšiemu rozmeru kliky v druhej miestnosti.

Čas na vypracovanie: 4 hodiny 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

Version: Slovak

Druhý deň

26. júl 2007

Úloha 4. Os uhla BCA trojuholníka ABC pretína jeho opísanú kružnicu v bode R rôznom od bodu C, os strany BC v bode P a os strany AC v bode Q. Stred strany BC označme K a stred strany AC označme L. Dokážte, že obsahy trojuholníkov RPK a RQL sa rovnajú.

Úloha 5. Kladné celé čísla a, b sú také, že číslo $(4a^2-1)^2$ je deliteľné $4ab-1$. Dokážte, že $a=b$.

Úloha 6. Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

$$S = \Big\{(x,y,z) \ : \ x,y,z \in \{0,1,\dots,n\},\ x+y+z>0\Big\}$$

pozostávajúcu z $(n+1)^3-1$ bodov trojrozmerného priestoru. Určte najmenší možný počet rovín, ktorých zjednotenie obsahuje všetky body z S, ale neobsahuje bod $(0,0,0)$.

Čas na vypracovanie: 4 hodiny 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.