12. júl 2006

Úloha 1. Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Bod P z vnútra trojuholníka spĺňa

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokážte, že $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $P = I$.

Úloha 2. Nech P je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva *dobrá*, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnohouholníka P na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnohouholníka P sa tiež považujú za *dobré*.

Predpokladajme, že P je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri P. Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany.

Úloha 3. Určte najmenšie reálne číslo M tak, aby nerovnosť

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

platila pre všetky reálne čísla a, b, c.

Čas na vypracovanie: 4 hodiny 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

13. júl 2006

Úloha 4. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel takých, že

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Úloha 5. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n > 1$ s celočíselnými koeficientmi a nech k je kladné celé číslo. Uvažujme polynóm $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P sa vyskytuje k-krát. Dokážte, že existuje najviac n celých čísel t takých, že $Q(t) = t$.

Úloha 6. Každej strane b konvexného mnohouholníka P priradíme maximálny obsah trojuholníka, ktorého jedna strana je b a ktorý je obsiahnutý v P. Dokážte, že súčet obsahov priradených všetkým stranám mnohouholníka P je aspoň dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P.

Čas na vypracovanie: 4 hodiny 30 minút.
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.