2013/2014
63. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 2. decembra 2013.*)

1. Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n. (*Pavel Novotný*)

2. Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqq m^2, \quad \text{pričom } m = \min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.
(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

3. Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú navzájom kolmé. (*Peter Novotný*)

4. Označme $l(n)$ najväčšieho nepárneho deliteľa čísla n. Určte hodnotu súčtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l(2^{2013}).$$

(*Michal Rolínek*)

5. Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu 3×10 dlaždicami 2×1, ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch? (*Stanislava Sojáková*)

6. V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.
(*Pavel Calábek*)

2013/2014
63. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 13. januára 2014.*)

1. Každému vrcholu pravidelného 63-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu možnú nezápornú hodnotu takého súčtu. (*Pavel Calábek*)

2. Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

3. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred I kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

4. Dana napísala na papier trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 2. Prehodením prvých dvoch cifier vzniklo trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 3. Číslo, ktoré vznikne prehodením posledných dvoch cifier pôvodného čísla, dáva po delení siedmimi zvyšok 5. Aký zvyšok po delení siedmimi bude mať číslo, ktoré vznikne prehodením prvej a poslednej cifry Daninho čísla? (*Pavel Novotný*)

5. V rovine sú dané body A, T, U tak, že uhol ATU je tupý. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom T, U sú postupne body dotyku strany BC s kružnicou trojuholníku vpísanou a pripísanou. (Pripísanou kružnicou tu rozumieme kružnicu, ktorá sa okrem strany BC dotýka aj polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA.) (*Šárka Gergelitsová*)

6. Nájdite najmenšie reálne číslo r také, že tyč s dĺžkou 1 možno rozlámať na štyri časti dĺžky nanajvýš r tak, že sa zo žiadnych troch týchto častí nedá zložiť trojuholník. (*Ján Mazák*)

2013/2014
63. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 13. januára 2014.*)

1. Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$a + 3b + c = 6,$$
$$-a + b - c = 2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov. (*Pavel Leischner*)

3. Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n. (*Pavel Novotný*)

4. Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm. (*Leo Boček*)

5. Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ deliteľný číslom 96. (*Jaromír Šimša*)

6. Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za prvenstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako poslední štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí. (*Vojtech Bálint*)