62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z9*

<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení obvodných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 20. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu `skmo@skmo.sk` v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke `skmo.sk/dokument.php?id=429` nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

---

1. *Do triedy chodí 33 žiakov. Pred Vianocami boli s hájnikom v lese plniť kŕmidlá. Dievčatá si rozobrali balíky sena. Chlapci sa rozdelili na dve skupiny: tí z prvej skupiny vzali každý 4 vrecká mrkvy a 3 vrecká orechov (teda každý z nich vzal 7 vreciek) a tí z druhej skupiny vzali každý jedno vrecko jabĺk a jedno vrecko orechov (teda každý z nich vzal 2 vrecká). Pomer počtu dievčat, chlapcov z prvej skupiny a chlapcov z druhej skupiny bol rovnaký ako pomer celkového počtu vreciek orechov, jabĺk a mrkvy. Koľko bolo v triede dievčat, koľko chlapcov nieslo vrecká s mrkvou a koľko ich nieslo vrecká s jablkami?* (Martin Mach)

Riešenie. Označme písmenom d počet dievčat, písmenom x počet chlapcov s mrkvou a písmenom y počet chlapcov s jablkami. Potom počet vreciek orechov je $3x+y$, počet vreciek jabĺk je y a počet vreciek mrkvy je $4x$. Rovnosť medzi pomermi počtov zo zadania je

$$d : x : y = (3x + y) : y : 4x.$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť pomer medzi x a y:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{4x},$$
$$4x^2 = y^2,$$
$$2x = y,$$

pričom si uvedomujeme, že všetky neznáme sú kladné čísla. Dosadením do úvodnej rovnosti dostávame

$$d : x : y = 5x : 2x : 4x = 5 : 2 : 4.$$

Zo zadania ďalej vieme, že $d+x+y = 33$. Práve zistený pomer sa teda snažíme rozšíriť tak, aby jeho členy dávali súčet 33:

$$d : x : y = 15 : 6 : 12.$$

V triede je 15 dievčat, 6 chlapcov nieslo vrecká s mrkvou a 12 chlapcov nieslo vrecká s jablkami.

Návrh hodnotenia. 2 body za zistenie pomeru počtu chlapcov s mrkvou a chlapcov s jablkami; 2 body za získanie pomeru počtu dievčat, chlapcov s mrkvou a chlapcov s jablkami; 2 body za správnu odpoveď.

2. *Na čistú tabuľu sme žltou kriedou napísali trojciferné prirodzené číslo tvorené navzájom rôznymi nenulovými ciframi. Potom sme na tabuľu bielou kriedou vypísali všetky ďalšie trojciferné čísla, ktoré možno získať zmenou poradia cifier žltého čísla. Aritmetický priemer všetkých čísel na tabuli bol* 370. *Každé číslo menšie ako žlté sme podčiarkli. Podčiarknuté čísla boli práve tri a ich aritmetický priemer bol* 205. *Určte žlté číslo.* (*Libor Šimůnek*)

Riešenie. Cifry hľadaného čísla označíme a, b, c, pričom budeme predpokladať, že

$$0 < a < b < c. \tag{1}$$

Čísla na tabuli, zoradené od najmenšieho po najväčšie, potom sú

$$\overline{abc},\ \overline{acb},\ \overline{bac},\ \overline{bca},\ \overline{cab},\ \overline{cba}.$$

Aritmetický priemer prvých troch z nich je 205, teda platí

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) = 3 \cdot 205,$$

po úprave

$$210a + 111b + 12c = 615. \tag{2}$$

Podobne zostavíme rovnicu na základe znalosti aritmetického priemeru všetkých čísel:

$$222a + 222b + 222c = 6 \cdot 370,$$

po úprave

$$\begin{aligned} 222 \cdot (a + b + c) &= 2\,220,\\ a + b + c &= 10. \end{aligned} \tag{3}$$

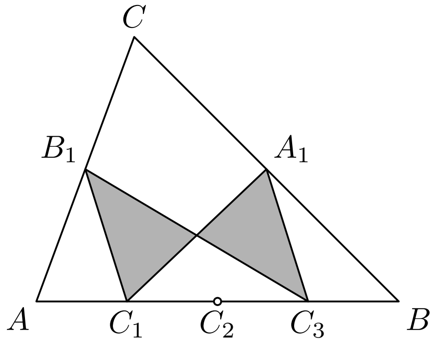
Z odvodených vzťahov (1), (2) a (3) sme teraz schopní určiť jednoznačne cifry a, b a c: Pre $a \geqq 3$ by bola hodnota na ľavej strane rovnice (2) príliš veľká a táto rovnosť by nemohla platiť. Pre $a = 2$ by vzhľadom na podmienku (1) muselo byť $b \geqq 3$ a aj v takom prípade by bola hodnota na ľavej strane rovnice (2) príliš veľká. Preto $a = 1$. Dosadením do rovníc (2) a (3) a ich úpravou získame sústavu

$$\begin{aligned} 111b + 12c &= 405,\\ b + c &= 9, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $b = 3$, $c = 6$. Žlté číslo, nami zapísané ako $\overline{bca}$, je teda 361.

Návrh hodnotenia. 2 body za zistenie, že ciferný súčet je 10; 2 body za vzťah $210a + 111b + 12c = 615$ alebo jeho obdobu; 1 bod za určenie cifier hľadaného čísla; 1 bod za hľadané číslo.

3. *Vyznačme vo všeobecnom trojuholníku ABC nasledujúce body podľa obr. 1. Body A_1 a B_1 sú stredy strán BC a AC, body C_1, C_2 a C_3 delia stranu AB na štyri rovnaké časti. Spojíme body A_1 a B_1 s bodmi C_1 a C_3, takže vznikne mašľa ohraničená týmito spojnicami. Akú časť obsahu celého trojuholníka mašľa zaberá?* (Martin Mach)



Obr. 1

Riešenie. Ukážeme, že štvoruholník $C_1C_3A_1B_1$ má polovičný obsah ako trojuholník ABC a mašľa zaberá práve polovicu tohto štvoruholníka. Odtiaľ vyplýva, že mašľa zaberá štvrtinu obsahu celého trojuholníka.

Označme c dĺžku strany AB a v veľkosť výšky trojuholníka ABC na túto stranu. Pri tomto označení je obsah trojuholníka rovný

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv.$$

Úsečka B_1A_1 je stredná priečka trojuholníka ABC, je teda rovnobežná so stranou AB a má polovičnú veľkosť. Body C_1, C_2 a C_3 delia stranu AB na štyri rovnaké diely, preto je úsečka C_1C_3 polovicou strany AB, má teda rovnakú veľkosť ako úsečka B_1A_1. Keďže úsečky B_1A_1 a C_1C_3 sú rovnobežné a rovnako dlhé, je štvoruholník $C_1C_3A_1B_1$ rovnobežníkom. Veľkosť výšky rovnobežníka na stranu C_1C_3 zodpovedá vzdialenosti strany AB a strednej priečky B_1A_1, čo je práve polovica výšky v. Obsah rovnobežníka je preto rovný

$$S_{C_1C_3A_1B_1} = \frac{c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Uhlopriečky v rovnobežníku $C_1C_3A_1B_1$ ho rozdeľujú na štyri trojuholníky, ktoré majú rovnaký obsah. Tento fakt stačí zdôvodniť pre ľubovoľné dva susedné trojuholníky: Uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú, odkiaľ vyplýva $|SC_1| = |SA_1|$, pričom S označuje priesečník uhlopriečok. Ďalej výška trojuholníka SC_1B_1 na stranu SC_1 je rovnaká ako výška trojuholníka SB_1A_1 na stranu SA_1. Odtiaľ vyplýva, že trojuholníky SC_1B_1 a SB_1A_1 majú rovnaký obsah. Rovnakým spôsobom možno zdôvodniť, že všetky trojuholníky SC_1B_1, SB_1A_1, SA_1C_3 a SC_3C_1 majú rovnaký obsah.

Odtiaľ teda vyplýva, že

$$S_{\text{mašľa}} = \frac{1}{2}S_{C_1C_3A_1B_1},$$

čo spolu s predchádzajúcou rovnosťou dokazuje, že mašľa zaberá štvrtinu obsahu trojuholníka ABC.

Návrh hodnotenia. 2 body za zdôvodnenie, že $C_1C_3A_1B_1$ je rovnobežník a vyjadrenie jeho obsahu; 2 body za zdôvodnenie, že uhlopriečky tento rovnobežník rozdeľujú na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom; 2 body za dopočítanie úlohy a správny výsledok.

Poznámka. Pri riešení úlohy možno samozrejme využiť rôzne iné poznatky, ktoré tu nerozvádzame. Napr. nesusedné dvojice trojuholníkov v rovnobežníku $C_1C_3A_1B_1$ sú vlastne zhodné, pritom je ľahké vyjadriť výšku a obsah trojuholníka SC_3C_1 vzhľadom na trojuholník ABC atď. Úlohu je možné riešiť aj bez pomocnej úvahy s rovnobežníkom. V každom prípade prispôsobte hodnotenie tak, aby 4 body zodpovedali zdôvodneniu jednotlivých postrehov a 2 body vyjadreniu výsledku.

---

4. *Nájdite všetky sedemciferné čísla, ktoré obsahujú každú z cifier* 0 *až* 6 *práve raz a pre ktoré platí, že ich prvé aj posledné dvojčíslie je deliteľné 2, prvé aj posledné trojčíslie je deliteľné 3, prvé aj posledné štvorčíslie je deliteľné 4, prvé aj posledné päťčíslie je deliteľné 5 a prvé aj posledné šesťčíslie je deliteľné 6.* (*Martin Mach*)

Riešenie. Posledná cifra musí byť párna, pretože posledné dvojčíslie je deliteľné dvoma. Aby posledné päťčíslie bolo deliteľné piatimi, musí byť posledná cifra 0 alebo 5. Z nich párna je 0. Prvé päťčíslie je tiež deliteľné piatimi, pre piate miesto ostáva cifra 5. Zatiaľ máme číslo určené takto:

$$* *** 5 * 0.$$

Posledné trojčíslie je deliteľné tromi, preto jeho ciferný súčet musí byť deliteľný tromi. Na predposlednú pozíciu tak môžeme doplniť 4 alebo 1. Aby posledné štvorčíslie bolo deliteľné štyrmi, musí byť posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi. Na predposlednom mieste tak môže byť 4, nie však 1. Teraz máme číslo určené takto:

$$* *** 540.$$

Keďže prvé dvojčíslie je deliteľné dvoma a prvé štvorčíslie je deliteľné štyrmi, sú cifry na druhej a štvrtej pozícii párne. Preto na prvej a tretej pozícii budú cifry nepárne. Zo znalosti, že posledné šesťčíslie je deliteľné šiestimi, odvodíme prvú cifru. Číslo je deliteľné šiestimi práve vtedy, keď je súčasne deliteľné dvoma aj tromi. Na prvom mieste musí byť cifra zvolená tak, aby ciferný súčet zvyšku čísla bol deliteľný tromi. Súčet cifier 0 až 6 je 21, takže na prvom mieste môžu byť cifry 3 a 6, z ktorých nepárna je cifra 3. Na tretej pozícii musí byť zvyšná nepárna cifra, čiže 1. Číslo sme doposiaľ určili takto:

$$3 * 1 * 540.$$

Ostáva doplniť cifry 2 a 6. Aby prvé trojčíslie bolo deliteľné tromi, dáme cifru 2 na druhú pozíciu. Hľadané číslo môže byť jedine

$$3\,216\,540.$$

Na záver musíme overiť, že sme na žiadnu požiadavku zo zadania nezabudli. Ostáva teda overiť, že prvé štvorčíslie je deliteľné štyrmi a prvé šesťčíslie je deliteľné šiestimi. To je splnené, takže hľadané číslo je 3 216 540.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za správne určenie a zdôvodnenie pozície piatich cifier; 1 bod za výsledné číslo. Nájdenie čísla bez zdôvodnenia jednotlivých krokov ohodnoťte 2 bodmi.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012