62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *Dokážte, že žiadna z rovníc*

$$3^{2x} + 6^y = 2013, \quad |3^{2x} - 6^y| = 2013$$

nemá riešenie v obore celých kladných čísel. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Pre $y = 1$ dostaneme z prvej rovnice $3^{2x} = 2\,013 - 6 = 3^2 \cdot 223$, čo je rovnica, ktorá nemá v obore kladných celých čísel riešenie, lebo 223 nie je mocninou troch.

Navyše pre $y = 1$ platí $3^{2x} \geqq 9 > 6$ pre ľubovoľné kladné celé číslo x, takže úpravou druhej rovnice dostávame $3^{2x} = 2\,013 + 6 = 3 \cdot 673$. Z podobného dôvodu ani táto rovnica nemá riešenie v obore kladných celých čísel.

Ďalej predpokladajme, že $y \geqq 2$. Pre každé kladné celé číslo x je ako 3^{2x}, tak aj 6^y deliteľné deviatimi. Výrazy na ľavých stranách oboch rovníc sú teda deliteľné deviatimi, avšak $2\,013$ deviatimi deliteľné nie je. Preto ani v tomto prípade nemá žiadna z oboch rovníc riešenie v obore kladných celých čísel.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho za dôkaz neexistencie riešenia pri každej z rovníc 3 body. Pri neúplnom riešení ohodnoťte dôkaz neexistencie riešenia pre $y \geqq 2$ v jednej rovnici 1 bodom, dôkaz neexistencie riešenia pre $y = 1$ v jednej rovnici tiež 1 bodom.

---

2. *Do políčok štvorčekovej mriežky* 11×11 *sme postupne zľava doprava a zhora nadol zapísali čísla* $1, 2, \ldots, 121$. *Štvorcovou doskou* 3×3 *sme všetkými možnými spôsobmi zakryli presne deväť políčok. V koľkých prípadoch bol súčet deviatich zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla?* (Vojtech Bálint)

Riešenie. Označme n číslo pokryté stredným políčkom štvorcovej dosky. Potom prvý riadok tejto dosky pokrýva čísla $n - 12$, $n - 11$, $n - 10$, jej druhý riadok pokrýva čísla $n - 1$, n a $n + 1$ a tretí riadok pokrýva čísla $n + 10$, $n + 11$ a $n + 12$. Súčet všetkých čísel pokrytých doskou tak je $9n$.

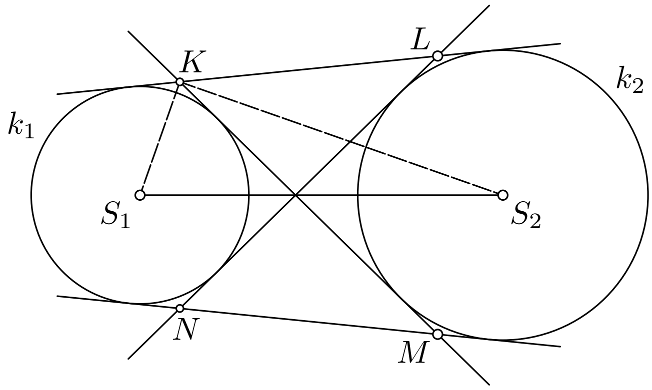
Súčet čísel pokrytých štvorcovou doskou bude druhou mocninou celého čísla práve vtedy, keď jej stred pokryje číslo n, ktoré je samo druhou mocninou celého čísla. Medzi číslami $1, 2, \ldots, 121$ majú túto vlastnosť iba čísla z množiny $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121\}$, z nich ale čísla 1, 4, 9, 100 a 121 ležia v krajnom riadku alebo krajnom stĺpci mriežky 11×11, a nemôžu tak byť pokryté stredným políčkom štvorcovej dosky 3×3.

Zo všetkých možných pokrytí mriežky má požadovanú vlastnosť 6 pokrytí, keď stred dosky pokrýva niektoré z čísel 16, 25, 36, 49, 64 a 81.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho za vyjadrenie súčtu čísel pod štvorcovou doskou v závislosti od niektorého (pokrytého) políčka dajte nanajvýš 2 body, za správnu diskusiu, kedy je tento súčet druhou mocninou celého čísla, dajte nanajvýš ďalšie 2 body. Za nájdenie aspoň troch vyhovujúcich pokrytí mriežky dajte jeden bod, ak riešiteľ zle uvedie niektorú polohu dosky, strhnite 1 bod, ak zle uvedie aspoň tri polohy dosky, strhnite 2 body.

3. *Uvažujme dve kružnice so stredmi S_1 a S_2 také, že ich spoločné vnútorné dotyčnice pretínajú ich spoločné vonkajšie dotyčnice v štyroch bodoch. Dokážte, že tieto štyri priesečníky ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom S_1S_2.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme k_1 kružnicu so stredom S_1 a k_2 kružnicu so stredom S_2. Priesečníky vnútorných a vonkajších dotyčníc označme K, L, M, N (obr. 1).



Obr. 1

Pri uvedenom označení sú priamky KL a KM dotyčnicami ako kružnice k_1, tak aj kružnice k_2, takže polpriamky KS_1 a KS_2 sú osami dvoch susedných uhlov so spoločným ramenom KM. Veľkosť uhla S_1KS_2 je teda $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, a preto bod K leží na Tálesovej kružnici nad priemerom S_1S_2.

Podobným spôsobom ukážeme, že na tejto kružnici ležia aj body L, M a N. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho za konštatovanie, že KS_1 je osou uhla s ramenami na priamkach KL a KM, dajte 1 bod, za podobné zistenie pre KS_2 dajte 1 bod. Tieto body dajte aj v prípade, že namiesto bodu K bude uvedený niektorý z bodov L, M, N. Pozor, táto bodovacia schéma nie je aditívna, t. j. v prípade rovnakého pozorovania pre viacej bodov K, L, M, N zaň dajte nanajvýš 2 body. Za zistenie, že uhol S_1KS_2 (alebo iný zodpovedajúci uhol) je pravý, dajte 3 body. Za dokončenie dôkazu dajte 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Pavel Calábek, Karel Horák, Tomáš Jurík, Peter Novotný, Jaromír Šimša

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012