2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 3. decembra 2012.*)

1. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

2. Dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ sa zvonka dotýkajú a ležia vo štvorci $ABCD$ so stranou a tak, že k_1 se dotýka strán AD a CD a k_2 sa dotýka strán BC a CD. Dokážte, že aspoň jeden z trojuholníkov AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah najviac $\frac{3}{16}a^2$. (*Tomáš Jurík*)

3. Označme $p(n)$ počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

4. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(*Pavel Calábek*)

5. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I, pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q. Priesečník priamky QI so stranou AC označme R. Dokážte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

6. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z, \\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x, \\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y. \end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 14. januára 2013.*)

1. Určte všetky trojice (a, b, c) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

ak viete, že má aspoň jeden celočíselný koreň. Prípadné iracionálne korene zapíšte v jednoduchom tvare bez odmocnín z iracionálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

3. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

4. Nájdite najmenšiu hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

pričom n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 2. (*Vojtech Bálint*)

5. V rovine je daná úsečka AB. Pre ľubovoľný bod X tejto roviny, ktorý je rôzny od A aj B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osovej súmernosti podľa priamky XB, resp. XA. Nájdite všetky také body X, ktoré spolu s bodmi X_A, X_B tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. (*Pavel Calábek*)

6. Je dané prirodzené číslo $k < 12$. Vo vrcholoch pravidelného 12-uholníka sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 12$ (ako na ciferníku hodín). V jednom kroku môžeme buď vymeniť niektoré dve protiľahlé čísla, alebo zvoliť ľubovoľných k susedných vrcholov a v nich napísané čísla zväčšiť o 1. Označme $T(k)$ nasledovné tvrdenie: „Po konečnom počte krokov možno dostať všetkých 12 čísel rovnakých.“ Dokážte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodnite o platnosti $T(3)$. (*Ján Mazák*)

2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v pondelok 14. januára 2013.*)

1. Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.) (*Peter Novotný*)

2. Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$? (*Ján Mazák*)

3. Daný je obdĺžnik $ABCD$ s obvodom o. V jeho rovine nájdite množinu všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od priamok AB, BC, CD, DA je rovný $\frac{2}{3}o$. (*Tomáš Jurík*)

4. Rozhodnite, či z ľubovoľných siedmich vrcholov daného pravidelného 19-uholníka možno vždy vybrať štyri, ktoré sú vrcholmi lichobežníka. (*Jaromír Šimša*)

5. Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. (*Jaroslav Švrček*)

6. Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\text{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\text{cm}^2$ a $2\,\text{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM. (*Pavel Leischner*)