61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, ktoré dávajú po delení dvojčlenom $x + 1$ zvyšok 2 a po delení dvojčlenom $x + 2$ zvyšok 1, pričom $p(1) = 61$.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Dvojnásobným použitím algoritmu delenia dostaneme

$$ax^2 + bx + c = (ax + b - a)(x + 1) + c - b + a,$$
$$ax^2 + bx + c = (ax + b - 2a)(x + 2) + c - 2b + 4a.$$

Dodajme k tomu, že nájdené zvyšky $c - b + a$ a $c - 2b + 4a$ sú zrejme rovné hodnotám $p(-1)$, resp. $p(-2)$, čo je v zhode s poznatkom, že akýkoľvek mnohočlen $q(x)$ dáva pri delení dvojčlenom $x - x_0$ zvyšok rovný číslu $q(x_0)$.

Podľa zadania platí $c - b + a = 2$ a $c - 2b + 4a = 1$. Tretia rovnica $a + b + c = 61$ je vyjadrením podmienky $p(1) = 61$. Získanú sústavu troch rovníc vyriešime jedným z mnohých možných postupov.

Z prvej rovnice vyjadríme $c = b - a + 2$, po dosadení do tretej rovnice dostaneme $a + b + (b - a + 2) = 61$, čiže $2b = 59$. Odtiaľ $b = 59/2$, čo po dosadení do prvej a druhej rovnice dáva $a + c = 63/2$, resp. $c + 4a = 60$. Ak odčítame posledné dve rovnice od seba, dostaneme $3a = 57/2$, odkiaľ $a = 19/2$, takže $c = 63/2 - 19/2 = 22$. Hľadaný trojčlen je teda jediný a má tvar

$$p(x) = \frac{19}{2} \cdot x^2 + \frac{59}{2} \cdot x + 22 = \frac{19x^2 + 59x + 44}{2}.$$

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Ukážte, že pre každé číslo a je mnohočlen $x^4 + (1-a)x^3 + x^2 + a$ deliteľný mnohočlenom $x^2 + x + 1$ bezo zvyšku. [Podiel je rovný $x^2 - ax + a$.]

N2. Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré je trojčlen $x^2 + 5x + 6$ deliteľný dvojčlenom $x + a$. Riešte jednak použitím algoritmu delenia, jednak použitím pravidla (často nazývaného *Bezoutova veta*), že mnohočlen $p(x)$ je deliteľný dvojčlenom $x - x_0$ práve vtedy, keď $p(x_0) = 0$. [Vyhovujú čísla $a = 2$ a $a = 3$, lebo priamym delením dostaneme rovnosť mnohočlenov $x^2 + 5x + 6 = (x + a)(x + 5 - a) + a^2 - 5a + 6$, takže hľadané čísla a sú korene rovnice $a^2 - 5a + 6 = 0$.]

N3. Určte všetky reálne čísla a, pre ktoré trojčlen $x^2 + 5x + 6$ dáva pri delení dvojčlenom $x + a$ zvyšok 2. [Vyhovujú čísla $a = 1$ a $a = 4$, ktoré dostaneme, keď pre všeobecný zvyšok $a^2 - 5a + 6$ (pozri úlohu 2) zostavíme a vyriešime rovnicu $a^2 - 5a + 6 = 2$.]

N4. Ukážte, že všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + 2(a - 1)x - 4$, kde a je ľubovoľné číslo, sú deliteľné jedným dvojčlenom $x + b$ s vhodným koeficientom b. Akým? [$b = 2$. Číslo b má požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď platí $p(-b) = 0$. Pretože $p(-b) = a(b^2 - 2b) + 2b - 4 = (b - 2)(ab + 2)$, je rovnosť $p(-b) = 0$ splnená pre každé a práve vtedy, keď $b = 2$.]

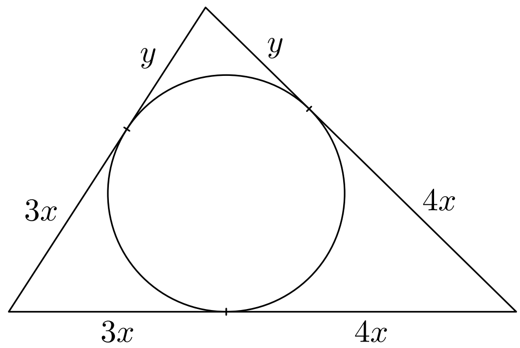
N5. Určte všetky dvojice reálnych čísel a a b, pre ktoré je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ deliteľný mnohočlenom $x^2 + bx + a$. [56–B–S–1]

---

2. *Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Využijeme všeobecný poznatok, že body dotyku vpísanej kružnice delia hranicu trojuholníka na šesť úsečiek, a to tak, že každé dve z nich, ktoré vychádzajú z toho istého vrcholu trojuholníka, sú zhodné. (Dotyčnice z daného bodu k danej kružnici sú totiž súmerne združené podľa spojnice daného bodu so stredom danej kružnice.)

V našej úlohe je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená na úseky, ktorých dĺžky označíme $3x$ a $4x$; dĺžku úsekov z vrcholu oproti najdlhšej strane označíme y (obr. 1). Strany trojuholníka majú teda dĺžky $7x$, $4x + y$ a $3x + y$, kde x, y sú neznáme kladné čísla (dĺžky berieme bez jednotiek). Ak má byť $7x$ dĺžka najdlhšej strany, musí platiť $7x > 4x + y$, čiže $3x > y$. Zdôraznime, že hľadané čísla x, y nemusia byť nutne celé, podľa zadania to však platí o číslach $7x$, $4x + y$ a $3x + y$.



Obr. 1

Údaj o obvode trojuholníka zapíšeme rovnosťou

$$72 = 7x + (3x + y) + (4x + y), \quad \text{čiže} \quad 36 = 7x + y.$$

Pretože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a pretože podľa zadania i čísla $4x + y$ a $3x + y$ sú celé, je celé i číslo $x = (4x + y) - (3x + y)$. Preto od tohto okamihu už hľadáme dvojice *celých* kladných čísel x, y, pre ktoré platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtiaľ vyplýva $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, teda $x \leqq 5$ a súčasne $x \geqq 4$.

Pre $x = 4$ je $y = 8$ a $(7x, 4x+y, 3x+y) = (28, 24, 20)$, pro $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (35, 21, 16)$. Strany trojuholníka sú teda $(28, 24, 20)$ alebo $(35, 21, 16)$. (Trojuholníkové nerovnosti sú zrejme splnené.)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pomocou dĺžok a, b, c strán všeobecného trojuholníka vyjadrite dĺžky úsečiek, na ktoré sú tieto strany rozdelené bodmi dotyku kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Na príklade potom ukážte, že tieto dĺžky nemusia byť vyjadrené celými číslami, aj keď strany trojuholníka takéto vyjadrenia majú. [Ide o dve úsečky dĺžky $x = \frac{1}{2}(a + b - c)$, dve úsečky dĺžky $y = \frac{1}{2}(b + c - a)$ a dve úsečky dĺžky $z = \frac{1}{2}(c + a - b)$. Tieto dĺžky nie sú celočíselné, ak sú napríklad všetky tri dĺžky a, b, c vyjadrené nepárnymi číslami.]

N2. Ak zostrojíme z troch úsečiek ľubovoľných dĺžok p, q, r úsečky dĺžok $a = p+q$, $b = q+r$ a $c = r + p$, budú tieto tri nové úsečky dĺžkami strán nejakého trojuholníka. Vysvetlite a potom zistite, aký význam v takom trojuholníku budú mať pôvodné dĺžky p, q, r. [Overiť algebraicky trojuholníkové nerovnosti $a + b > c > |a - b|$ je triviálne, lebo ide o zrejmé nerovnosti $p + 2q + r > p + r > |p - r|$. V trojuholníku so stranami a, b, c sú dĺžky p, q, r dĺžkami úsečiek, na ktoré sú strany a, b, c rozdelené bodmi dotyku vpísanej kružnice, ako to vyplýva z výsledku úlohy 1.]

N3. Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leqq b \leqq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, L a M.

Dokážte, že z úsečiek AK, BL a CM je možné zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b+c<3a$. [57–C–II–1]

N4. Dokážte, že v každom pravouhlom trojuholníku je súčet polomerov vpísanej kružnice a opísanej kružnice rovný aritmetickému priemeru dĺžok oboch odvesien. [Prvé riešenie úlohy 59–A–S–2.]

N5. Určte dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka, ak poznáte polomer r kružnice vpísanej a polomer R kružnice pripísanej k prepone tohto trojuholníka (t. j. kružnice, ktorá sa dotýka zvonku prepony a predĺženia oboch odvesien trojuholníka). [45–C–I–6]

---

3. *Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť*

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\big\}=\{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Prvky danej množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$\mathsf{M}=\{2,\ 3,\ 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3^2\cdot 5,\ 2^2\cdot 3^2\cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel a, b, c vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel a, b, c: keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z M; keby naopak bolo prvočiniteľom všetkých troch čísel a, b, c, nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z M. Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla a, b, c usporiadať tak, že rozklady čísel a, b obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom $(c,5)=1$) a že $(a,2)=2$ (ako vieme, aspoň jedno z čísel a, b musí byť párne). Číslo 5 z množiny M je potom nutne rovné (a,b), takže platí $(b,2)=1$, a preto $(b,3)=3$ (inak by platilo $(b,c)=1$), odtiaľ zase s ohľadom na $(a,b)=5$ vyplýva $(a,3)=1$. Máme teda $a=5\cdot 2^s$ a $b=5\cdot 3^t$ pre vhodné prirodzené čísla s a t.

Z rovnosti $[a,b]=2^s\cdot 3^t\cdot 5$ vyplýva, že nastane jeden z troch nasledovných prípadov.

(1) $2^s\cdot 3^t\cdot 5=60=2^2\cdot 3^1\cdot 5$. Vidíme, že platí $s=2$ a $t=1$, čiže $a=20$ a $b=15$. Ľahko určíme, že tretím číslom je $c=18$.

(2) $2^s\cdot 3^t\cdot 5=90=2^1\cdot 3^2\cdot 5$. V tomto prípade $a=10$, $b=45$ a $c=12$.

(3) $2^s\cdot 3^t\cdot 5=180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$. Teraz $a=20$, $b=45$ a $c=6$.

Odpoveď. Hľadané čísla a, b, c tvoria jednu z množín $\{20,15,18\}$, $\{10,45,12\}$ a $\{20,45,6\}$.

Iné riešenie. V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako 1, takže čísla (a,b), (a,c), (b,c) musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$. Čísla 2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\big\{(a,b),(a,c),(b,c)\big\}=\{2,3,5\}\quad\text{a}\quad\big\{[a,b],[a,c],[b,c]\big\}=\{60,90,180\}.$$

Pretože poradie čísel a, b, c nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí $(a,b)=$ $=2$, $(a,c)=3$ a $(b,c)=5$. Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a=2\cdot 3\cdot x=6x,\quad b=2\cdot 5\cdot y=10y,\quad c=3\cdot 5\cdot z=15z$$

pre vhodné prirodzené čísla x, y, z. Zo známej rovnosti $[x, y]\cdot(x, y) = xy$ tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a, b] = \frac{6x\cdot 10y}{2} = 30xy, \quad [a, c] = \frac{6x\cdot 15z}{3} = 30xz, \quad [b, c] = \frac{10y\cdot 15z}{5} = 30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy, 30xz, 30yz\} = \{60, 90, 180\}$ upravenej na $\{xy, xz, yz\} = \{2, 3, 6\}$ potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. Pretože z podmienky $5 = (b, c) = (10y, 15z)$ vyplýva $y \neq 3$ a $z \neq 2$, prichádzajú do úvahy len trojice (x, y, z) rovné $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ a $(3, 2, 1)$, ktorým postupne zodpovedajú trojice (a, b, c) rovné $(6, 20, 45)$, $(12, 10, 45)$, $(18, 20, 15)$. Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $(a, b) = 10$ a zároveň $[a, b] = 150$. [$\{a, b\} = \{10, 150\}$ alebo $\{a, b\} = \{30, 50\}$. Pretože $10 = 2\cdot 5$ a $150 = 2\cdot 3\cdot 5^2$, požadované rovnosti sú splnené práve vtedy, keď $a = 2\cdot 3^s\cdot 5^t$ a $b = 2\cdot 3^u\cdot 5^v$, kde $\{s, u\} = \{0, 1\}$ a $\{t, v\} = \{1, 2\}$.]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b platí vzťah $[a, b]\cdot(a, b) = ab$. [Podľa úvahy o počtoch zastúpení každého prvočísla v číslach a, b, (a, b) a $[a, b]$ stačí vysvetliť, prečo pre akékoľvek čísla α, β platí rovnosť $\min\{\alpha, \beta\} + \max\{\alpha, \beta\} = \alpha + \beta$. K tomu stačí rozlíšiť prípady $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ a $\alpha > \beta$. Iné riešenie: Nech $d = (a, b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pre nesúdeliteľné x a y, odtiaľ vyplýva $[a, b] = xyd$, takže oba súčiny $[a, b]\cdot(a, b)$ a ab sa rovnajú číslu xyd^2.]

N3. Nájdite všetky trojice a, b, c prirodzených čísel, pre ktoré súčasne platí $(ab, c) = 2^8$, $(bc, a) = 2^9$ a $(ca, b) = 2^{11}$. [50–C–S–1]

N4. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $a+b+[a, b]+(a, b) = 50$. [50–C–II–1]

N5. Pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b dokážte nerovnosť $a\cdot(a, b) + b\cdot[a, b] \geqq 2ab$. Zistite tiež, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. [60–C–I–5]

---

4. *Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.*

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (Ján Mazák)

Riešenie. a) Z rovnosti $16 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ vyplýva, že obidva súčty $a + c$ a $b + d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a + c$ alebo $b + d$ má požadovanú vlastnosť.

b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \tfrac{1}{2}(a - b)^2 + \tfrac{1}{2}(b - c)^2 + \tfrac{1}{2}(c - d)^2 + \tfrac{1}{2}(d - a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-d)^2$ a $(d-a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov? Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodenej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoríc platí $a - b = b - c = c - d = d - a = 0$, čiže $a = b = c = d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab + bc + cd + da = 16$ tvar $4a^2 = 16$, čomu vyhovuje $a = \pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a = b = c = d = 2$ a $a = b = c = d = -2$ má súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ak reálne čísla x, y, z vyhovujú rovnici $x^2+y^2=z^2$, potom aspoň jedno z čísel $|x+z|$, $|x-z|$ neprevyšuje hodnotu $|y|$. Dokážte. [Keby $|x+z|$, $|x-z|$ boli dve (kladné) čísla väčšie ako $|y|$, bolo by číslo $|x+z|\cdot|x-z|$ väčšie ako $|y|^2$, podľa zadania ale ide o dve rovnaké čísla.]

N2. Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že čísla $x+y+z-xyz$ a $xy+yz+zx-3$ nemôžu byť súčasne záporné. [60–C-II–4]

N3. Je dané prirodzené číslo n ($n \geqq 2$) a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktoré platí $x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1$. Dokážte nerovnosť $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n$. [55–C–I–4]

N4. Ak reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnosti $a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1$, platí nerovnosť $ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3$. Dokážte a zistite, kedy pritom nastane rovnosť. [55–C–II–2]

N5. Dokážte, že nerovnosť $(a^2+1)(b^2+1)-(a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$ platí pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$. Zistite, kedy nastane rovnosť. [59–C–II–2]

N6. Dokážte, že nerovnosť $(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2$ platí pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c. Zistite, kedy nastane rovnosť. [58–C–S–1]

N7. Nerovnosti $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ dokážte pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b. [58–C–I–6]

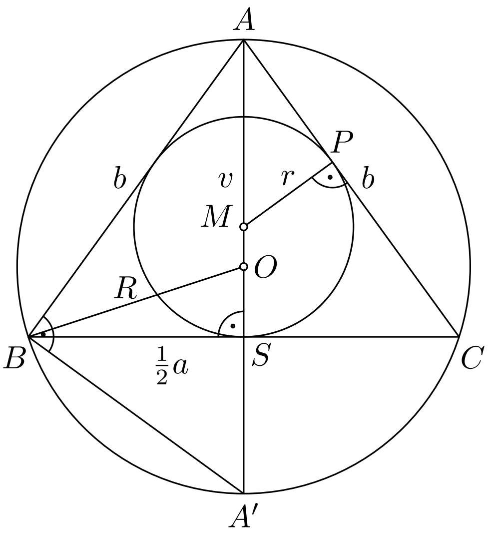
N8. Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je 6. Dokážte, že aspoň jedno z čísel $ab+bc$, $bc+ca$ alebo $ca+ab$ nie je väčšie ako 8. [60–B–I–3]

---

5. *Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geqq 2r$, a zistite, kedy nastane rovnosť.*

(*Leo Boček*)

Riešenie. Označme S stred základne BC daného rovnoramenného trojuholníka ABC, O stred jeho opísanej kružnice, M stred vpísanej kružnice a P pätu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 2).



Obr. 2

Z pravouhlého trojuholníka BSA pomocou Pytagorovej vety vyjadríme veľkosť v výšky AS, pričom v pravouhlom trojuholníku BSO s preponou dĺžky R pre odvesnu OS

platí $|OS| = \big||AS| - |AO|\big| = |v - R|$ (musíme si uvedomiť, že v tupouhlom trojuholníku ABC bude bod S ležať medzi bodmi A a O!). Dostávame tak dve rovnosti

$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$
$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (v - R)^2;$$

ich sčítaním vyjde

$$v^2 + R^2 = b^2 + (v - R)^2, \quad \text{čiže} \quad b^2 = 2vR.$$

Dosadením z prvej rovnice $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ do poslednej rovnosti dostaneme hľadaný vzorec pre R.

Dodajme, že rovnosť $b^2 = 2vR$, ktorú sme práve odvodili a z ktorej už ľahko vyplýva vzorec pre polomer R, je Euklidovou vetou o odvesne AB pravouhlého trojuholníka ABA' s preponou AA', ktorá je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 2).

Nájdený vzorec pre polomer R zapíšeme prehľadne spolu s druhým hľadaným vzorcom pre polomer r, ktorého odvodeniu sa ešte len budeme venovať:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \tag{$*$}$$

Druhý zo vzorcov $(*)$ sa dá získať okamžite zo známeho vzťahu $r = 2S/(a + b + c)$ pre polomer r kružnice vpísanej do trojuholníka so stranami a, b, c a obsahom S; v našom prípade stačí len dosadiť $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podľa úvodnej časti riešenia.

Ďalšie dva spôsoby odvodenia druhého zo vzorcov $(*)$ založíme na úvahe o pravouhlom trojuholníku AMP, ktorého strany majú dĺžky

$$|AM| = v - r, \quad |MP| = r, \quad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pre tento trojuholník môžeme napísať Pytagorovu vetu alebo využiť jeho podobnosť s trojuholníkom ACS, konkrétne zapísať rovnosť sínusov ich spoločného uhla pri vrchole A. Podľa toho dostaneme rovnice

$$(v - r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{r}{v - r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

ktoré sú obidve lineárne vzhľadom na neznámu r a majú riešenie

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad r = \frac{av}{a + 2b}.$$

Po dosadení za v v oboch prípadoch dostaneme hľadaný vzorec pre r. V druhom prípade je to zrejmé, v prvom to ukážeme:

$$\begin{aligned} r &= \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} = \\ &= \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{(2b - a)(2b + a)}} = \frac{a\sqrt{2b - a}}{2\sqrt{2b + a}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \end{aligned}$$

Ešte ostáva dokázať nerovnosť $R \geqq 2r$. Využijeme na to odvodené vzorce (*), z ktorých dostávame (pripomíname, že $2b > a > 0$)

$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a + 2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b - a)}.$$

Nerovnosť $R \geqq 2r$ teda platí práve vtedy, keď $b^2 \geqq a(2b - a)$. Posledná nerovnosť je však ekvivalentná s nerovnosťou $(a - b)^2 \geqq 0$, ktorej platnosť je už zrejmá. Tým je dôkaz nerovnosti $R \geqq 2r$ hotový. Navyše vidíme, že rovnosť v nej nastane jedine v prípade, keď $(a - b)^2 = 0$, čiže $a = b$, teda práve vtedy, keď je pôvodný trojuholník nielen rovnoramenný, ale dokonca rovnostranný.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre všeobecný trojuholník ABC so stranami a, b, c a obsahom S platí pre polomer r vpísanej kružnice vzorec $r = 2S/(a + b + c)$. Dokážte. [Stred M vpísanej kružnice rozdeľuje uvažovaný trojuholník ABC na tri menšie trojuholníky BCM, ACM, ABM o obsahoch $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, ktorých súčet je S, odkiaľ vyplýva dokazovaný vzorec.]

N2. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, kde bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l. [59–C–S–2]

N3. Kružnica $l(T; s)$ prechádza stredom kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnica $m(U; t)$ sa zvonku dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich. [59–B–II–1]

N4. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC. [58–C–I–2]

N5. Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S. [58–C–II–4]

N6. Rovnoramennému lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD je možné vpísať kružnicu so stredom O. Určte obsah S lichobežníka, ak sú dané dĺžky úsečiek OB a OC. [56–C–II–3]

N7. Kružnice k, l, m sa po dvoch zvonku dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, l sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia. [55–C–I–2]

N8. Kružnice k, l s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB a kružnica l sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery kružníc k a l, ak je polomer kružnice k v centimetroch vyjadrený celým číslom. [55–C–II–3]

---

6. *Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Ak je celkový počet políčok hracej plochy párny (v zadaní pre $n = 4$ a $n = 6$), môže v poradí druhá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie políčok druhá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v každom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Ak je celkový počet políčok hracej plochy nepárny (v zadaní pre $n = 5$), môže v poradí prvá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky okrem jedného do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie prvá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v prvom ťahu položí figúrku na (jediné) nespárované políčko a v každom ďalšom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Nájsť požadované spárovania políčok je pre zadané príklady ľahké a je to možné urobiť viacerými spôsobmi. Ukážme tie z nich, ktoré majú určité črty pravidelnosti. Na obr. 3 zľava je vidno, ako je možné spárovať políčka časti hracej plochy o rozmeroch 4×2; celú hraciu plochu 4×4 rozdelíme na dva také bloky a urobíme spárovanie v každom z nich. I na spárovanie políčok hracej plochy 6×6 môžeme využiť spárovanie v dvoch blokoch 4×2; na obr. 3 uprostred je znázornené možné stredovo súmerné spárovanie všetkých políčok. Nakoniec na obr. 3 vpravo je príklad spárovania políčok hracej plochy 5×5 s nespárovaným políčkom v ľavom hornom rohu (nespárované políčko nemusí byť nutne rohové); opäť je pritom využitý jeden blok 4×2.

1	2
3	4
2	1
4	3

1	2	E'	A'	D'	B'
3	4	D'	B'	C'	A'
2	1	C'	E'	$3'$	$4'$
4	3	E	C	$1'$	$2'$
A	C	B	D	$4'$	$3'$
B	D	A	E	$2'$	$1'$

•	A	B	C	D
1	2	E	A	B
3	4	C	D	F
2	1	G	E	H
4	3	H	F	G

Obr. 3

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Riešte jednoduchší variant zadanej úlohy, keď povolené *skoky* sú ťahy šachovou vežou, t. j. presuny figúrky v smere riadkov alebo v smere stĺpcov hracej dosky (o ľubovoľný počet políčok). Dokážete objaviť víťaznú stratégiu pre tento variant hry v prípade hracej dosky ľubovoľných rozmerov $m\times n$? [Ak sú obe čísla m a n nepárne, má víťaznú stratégiu prvá hráčka, ak je aspoň jedno z čísel m, n párne, má víťaznú stratégiu druhá hráčka. V oboch prípadoch si uvedená hráčka vopred v duchu rozdelí všetky políčka hracej dosky do dvojíc (v prvom prípade jedno políčko ostane, naň potom hráčka položí figúrku v úvodnom ťahu), a to tak, aby v každom zostavenom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom (pre ťahy vežou je to ľahké, stačí párovať len susedné políčka riadku alebo stĺpca); v priebehu hry potom táto hráčka môže vždy skočiť z jedného políčka na druhé políčko toho istého páru, takže vyhrá.]

N2. Na tabuli sú napísané všetky prvočísla menšie ako 100. Gitka a Terka sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najprv Gitka zmaže jedno z prvočísel. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zmaže jedno z prvočísel, ktoré má s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom jednu zhodnú číslicu (tak po prvočísle 3 je možné zmazať trebárs 13 alebo 37). Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne prvočíslo zmazať, prehráva. Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky? [Pretože prvočísel menších ako 100 je nepárny počet (25), ponúka sa hypotéza, že víťaznú stratégiu bude mať prvá hráčka. Ukážme, že to tak naozaj je. Táto hráčka si vopred v duchu spáruje (podľa spoločnej číslice) napísané prvočísla (dá sa to urobiť viacerými spôsobmi, uvedieme ten, pri ktorom v každom kroku párujeme najmenšie doposiaľ nespárované prvočíslo s najmenším ďalším doposiaľ nespárovaným prvočíslom so spoločnou číslicou): $(2, 23)$,

$(3, 13)$, $(5, 53)$, $(7, 17)$, $(11, 19)$, $(29, 59)$, $(31, 37)$, $(41, 43)$, $(47, 67)$, $(61, 71)$, $(73, 79)$, $(83, 89)$; jediné zostávajúce nespárované prvočíslo 97 preto Gitka zmaže ako prvé a ďalej pri hre bude mazať vždy prvočíslo, ktoré je v páre s predchádzajúcim zmazaným prvočíslom. Týmto postupom musí vyhrať.]

N3. Dve hráčky majú k dispozícii pre hru, ktorú opíšeme, neobmedzený počet dvadsaťcentových mincí a stôl s kruhovou doskou s priemerom 1 meter. Hra prebieha tak, že sa hráčky pravidelne striedajú v ťahoch. Najprv prvá hráčka položí jednu mincu kamkoľvek na prázdny stôl. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, položí na voľnú časť stola ďalšiu mincu (tak, aby nepresahovala okraj stola a aby sa skôr položených mincí nanajvýš dotýkala). Ktorá z oboch hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov súperky? [Víťaznú stratégiu má prvá hráčka: prvú mincu položí doprostred stola a v každom ďalšom kroku položí mincu na miesto súmerne združené podľa stredu stola s miestom práve položenej mince.]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	1. Jaromír Šimša, 2. Pavel Leischner, 3. Tomáš Jurík, 4. Ján Mazák, 5. Leo Boček, 6. Pavel Calábek
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Pavel Novotný, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín*

$$\{a \cdot [a,b],\ b \cdot (a,b)\} = \{45, 180\},$$

pričom (x,y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x,y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Z danej rovnosti vyplýva, že číslo b je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo a je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:

$$a \cdot [a,b] = 180 \quad \text{a} \quad b \cdot (a,b) = 45. \tag{1}$$

Keďže číslo a delí číslo $[a,b]$, je číslo $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla a, takže musí platiť buď $a = 2$, alebo $a = 6$. V prípade $a = 2$ (vzhľadom na to, že b je nepárne) platí

$$a \cdot [a,b] = 2 \cdot [2,b] = 2 \cdot 2b = 4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená jedine pre $b = 45$. Vtedy $b \cdot (a,b) = 45 \cdot (2,45) = 45$, takže je splnená aj druhá rovnosť v (1), a preto dvojica $a = 2$, $b = 45$ je riešením úlohy.

V prípade $a = 6$ podobne dostaneme

$$a \cdot [a,b] = 6 \cdot [6,b] = 6 \cdot 2 \cdot [3,b] = 12 \cdot [3,b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená práve vtedy, keď $[3,b] = 15$. Tomu vyhovujú jedine hodnoty $b = 5$ a $b = 15$. Z nich však iba hodnota $b = 15$ spĺňa druhú rovnosť v (1), ktorá je teraz v tvare $b \cdot (6,b) = 45$. Druhým riešením úlohy je teda dvojica $a = 6$, $b = 15$, žiadne ďalšie riešenia neexistujú.

Odpoveď. Hľadané dvojice sú dve, a to $a = 2$, $b = 45$ a $a = 6$, $b = 15$.

Iné riešenie. Označme $d = (a,b)$. Potom $a = ud$ a $b = vd$, pričom u, v sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže $[a,b] = uvd$. Z rovností

$$a \cdot [a,b] = ud \cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b \cdot (a,b) = vd \cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo $a \cdot [a,b]$ je u^2-násobkom čísla $b \cdot (a,b)$, takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Preto platí $u^2 = \frac{180}{45} = 4$, čiže $u = 2$. Z rovnosti $vd^2 = 45 = 3^2 \cdot 5$ vyplýva, že buď $d = 1$ (a $v = 45$), alebo $d = 3$ (a $v = 5$). V prvom prípade $a = ud = 2 \cdot 1 = 2$ a $b = vd = 45 \cdot 1 = 45$, v druhom $a = ud = 2 \cdot 3 = 6$ a $b = vd = 5 \cdot 3 = 15$.

Poznámka. Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla a, b sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok $[a, b]$), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel a a b. Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla a, b spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel a, b) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin $a \cdot [a, b]$ je *vždy* deliteľný súčinom $b \cdot (a, b)$, pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a \cdot [a, b]}{b \cdot (a, b)} = \frac{a}{(a, b)} \cdot \frac{[a, b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch *celých* čísel.

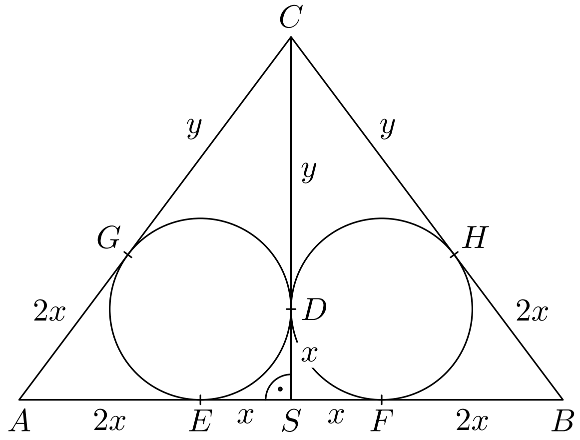
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak chýba zdôvodnenie rovností (1) v inak úplnom riešení (argumenty $(a, b) < [a, b]$ či $(a, b) \mid [a, b]$ samotné nestačia; stačí však napr. argument $a \geqq (a, b)$ a $[a, b] \geqq b$), strhnite 1 bod. Za nájdenie oboch vyhovujúcich dvojíc (napríklad uhádnutím) dajte 1 bod, ďalšie body potom podľa kvality podaného postupu hľadania, hlavne jeho systematickosti.

---

2. *Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.*

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Vďaka súmernosti podľa priamky CS sa obe vpísané kružnice dotýkajú výšky CS v rovnakom bode, ktorý označíme D. Body dotyku týchto kružníc s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme postupne E, F, G, H (obr. 1). Pre vyjadrenie všetkých potrebných dĺžok ešte zavedieme označenie $x = |SD|$ a $y = |CD|$.



Obr. 1

Vzhľadom na symetriu dotyčníc z daného bodu k danej kružnici platia rovnosti

$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má preto dĺžku $2x$, ktorá je podľa zadania zároveň dĺžkou úsečiek AE a BF, a teda aj dĺžkou úsečiek AG a BH (opäť vďaka symetrii dotyčníc). Odtiaľ už bezprostredne vyplývajú rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$

Závislosť medzi dĺžkami x a y zistíme použitím Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník ACS (s odvesnou AS dĺžky $3x$):

$$(2x+y)^2 = (3x)^2 + (x+y)^2.$$

Roznásobením a ďalšími úpravami odtiaľ dostaneme (x a y sú kladné hodnoty)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 9x^2 + x^2 + 2xy + y^2, \\ 2xy &= 6x^2, \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Hľadaný pomer tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x+y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenajme, že prakticky rovnaký postup celého riešenia možno zapísať aj pri štandardnom označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Keďže podľa zadania platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a teda $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ vyplýva $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkiaľ

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pytagorovej vety pre trojuholník ACS,

$$(v + \tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2,$$

vychádza $3v = 2c$, čiže $c : v = 3 : 2$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vyjadrenie potrebných dĺžok pomocou dvoch parametrov (napr. x, y alebo c, v) dajte 3 body, ďalšie 2 body pridajte za efektívne využitie Pytagorovej vety a 1 bod za konečné určenie hľadaného pomeru.

---

3. *Reálne čísla p, q, r, s spĺňajú rovnosti*

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4 \qquad \text{a} \qquad pq + rs = 1.$$

Dokážte, že niektoré dve z týchto štyroch čísel sa líšia najviac o 1 a niektoré dve sa líšia najmenej o 1. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Druhá zo zadaných rovníc napovedá, že by sme mali skúmať odchýlky čísel v dvojiciach p, q a r, s. Pre súčet druhých mocnín týchto odchýlok platí

$$(p-q)^2 + (r-s)^2 = \bigl(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\bigr) - 2(pq + rs) = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Avšak ak je súčet dvoch reálnych čísel rovný číslu 2, nemôžu byť oba sčítance ani väčšie ako 1, ani menšie ako 1. Jedno z čísel $(p-q)^2$, $(r-s)^2$ je teda najviac 1 a jedno je najmenej 1. To isté potom platí aj o číslach $|p-q|$ a $|r-s|$, čo sme chceli dokázať.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Určenie súčtu $(p-q)^2 + (r-s)^2$ ohodnoťte 4 bodmi. Ak riešiteľ pri správnej úvahe urobí záver o číslach $p-q$ a $r-s$ bez absolútnych hodnôt (a nepodotkne pritom, že možno bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $p \geqq q$ a $r \geqq s$), strhnite 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaromír Šimša
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť*

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2, na pravú stranu:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2,\\ (x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z),\\ (x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z). \end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x - y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x + y < x - y + 2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz,\\ 0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz,\\ 0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y),\\ 0 &> 2(y - x)(y - z). \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y - x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y - z$ je záporný.

Za úplné riešenie udeľte 6 bodov. Len za overovanie nerovnosti pre konkrétne trojice čísel $x < y < z$ žiadny bod nedávajte.

---

2. *Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách?* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme $\overline{abc}$ to trojciferné číslo, o ktorého trojnásobku sa píše v texte úlohy. Platí tak rovnica

$$3\overline{abc} + 6 = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}.$$

Keďže na pravej strane je každá z cifier a, b, c dvakrát na mieste jednotiek, desiatok aj stoviek, môžeme rovnicu prepísať na tvar

$$300a + 30b + 3c + 6 = 222a + 222b + 222c, \quad \text{čiže} \quad 78a + 6 = 192b + 219c.$$

Po vydelení číslom 3 dostaneme rovnicu $26a + 2 = 64b + 73c$, z ktorej vidíme, že c je párna cifra. Platí preto $c \geqq 2$, čo spolu so zrejmou nerovnosťou $b \geqq 1$ (pripomíname, že všetky tri neznáme cifry sú podľa zadania nenulové) vedie na odhad

$$64b + 73c \geqq 64 + 146 = 210.$$

Musí preto platiť $26a + 2 \geqq 210$, odkiaľ $a \geqq (210 - 2) : 26 = 8$, takže cifra a je buď 8, alebo 9. Pre $a = 8$ však v nerovnosti z predošlej vety nastane rovnosť, takže nutne $b = 1$ a $c = 2$ (a rovnica zo zadania úlohy je potom splnená). Pre $a = 9$ dostávame rovnicu

$$64b + 73c = 26 \cdot 9 + 2 = 236,$$

z ktorej vyplýva, že c je jednak deliteľné štyrmi, jednak je menšie ako 4, čo nemôže nastať súčasne.

Odpoveď. Cifry na kartičkách sú 8, 2 a 1.

Poznámka. Riešiť odvodenú rovnicu $26a + 2 = 64b + 73c$ pre neznáme (nenulové a navzájom rôzne) cifry a, b, c možno viacerými úplnými a systematickými postupmi, uviedli sme len jeden z nich.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho najviac 3 body za správne zostavenú rovnicu, rozvoj dekadických zápisov čísel a úpravu na lineárnu rovnicu s neznámymi a, b, c. Ďalšími 3 bodmi potom ohodnoťte postup pri hľadaní riešenia odvodenej rovnice, pritom len za uhádnutie hľadanej trojice dajte 1 bod.

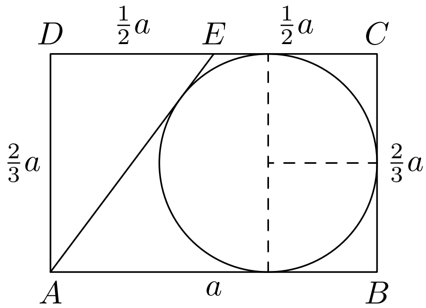
---

3. *Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka $ABCE$ vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede.* (Ján Mazák)

Riešenie. Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotyčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 1), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$.



Obr. 1

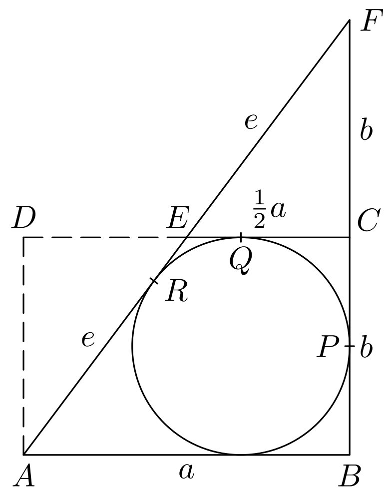
[1] Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.

Teraz si všimneme, že pre dĺžky strán trojuholníka ADE platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \tfrac{2}{3}a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník ADE pravý uhol pri vrchole D, a teda rovnobežník $ABCD$ je obdĺžnik. Dotyčnica BC kružnice vpísanej štvoruholníku $ABCE$ je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice AB a CE. To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice BC je stredom úsečky BC (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice na jej vyznačený polomer).

Iné riešenie. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez všimnutia si, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná priečka trojuholníka ABF, pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 2), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$,



Obr. 2

$b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$ (rovnosť $2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b + e = a + \frac{1}{2}a$ $(= \frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotyčnicového štvoruholníka $ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí

$$|FP| + |FR| = (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) =$$
$$= \tfrac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a = 2a,$$

čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za použitie kritéria dotyčnicovosti štvoruholníka $ABCE$ na vyjadrenie dĺžky strany AE.

4. *Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Úloha dvoch po sebe zotieraných čísel je v zadanej hre symetrická: ak je po čísle x možné zotrieť číslo y, je (pri inom priebehu hry) po čísle y možné zotrieť číslo x. Preto si môžeme celú hru (so zadaným číslom n) „sprehľadniť" tak, že najskôr vypíšeme všetky takéto (nazývajme ich *prípustné*) dvojice (x, y). Keďže na poradí čísel v prípustnej dvojici nezáleží, stačí vypisovať len tie dvojice (x, y), v ktorých $x < y$.

V prípade $n = 6$ všetky prípustné dvojice sú

$$(1, 3),\ (1, 4),\ (1, 5),\ (1, 6),\ (2, 5),\ (3, 5).$$

Z tohto zoznamu ľahko odhalíme, že víťaznú stratégiu má (prvá) hráčka Marína. Ak totiž zotrie na začiatku hry číslo 4, musí Tamara zotrieť číslo 1, a keď potom Marína zotrie číslo 6, nemôže už Tamara žiadne ďalšie číslo zotrieť. Okrem tohto priebehu $4 \to 1 \to 6$ si môže Marína zaistiť víťazstvo aj inými, pre Tamaru „vynútenými" priebehmi, napríklad $6 \to 1 \to 4$ alebo $4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$.

V prípade $n = 12$ je všetkých prípustných dvojíc výrazne väčšie množstvo. Preto si položíme otázku, či všetky čísla od 1 do 12 možno rozdeliť na šesť prípustných dvojíc. Ak totiž nájdeme takú šesticu, môžeme opísať víťaznú stratégiu druhej hráčky (Tamary): ak zotrie Marína pri ktoromkoľvek svojom ťahu číslo x, Tamara potom vždy zotrie to číslo y, ktoré s číslom x tvorí jednu zo šiestich nájdených dvojíc. Tak nakoniec Tamara zotrie aj posledné (dvanáste) číslo a vyhrá (prípadne hra skončí skôr tak, že Marína nebude môcť zotrieť žiadne číslo).

Hľadané rozdelenie všetkých 12 čísel do šiestich dvojíc naozaj existuje, napríklad

$$(1, 4),\ (2, 9),\ (3, 8),\ (5, 12),\ (6, 11),\ (7, 10).$$

Iné vyhovujúce rozdelenie dostaneme, keď v predošlom dvojice $(1, 4)$ a $(6, 11)$ zameníme dvojicami $(1, 6)$ a $(4, 11)$. Ďalšie, menej podobné vyhovujúce rozdelenie je napríklad

$$(1, 6),\ (2, 5),\ (3, 10),\ (4, 9),\ (7, 12),\ (8, 11).$$

Odpoveď. Pre $n = 6$ má víťaznú stratégiu Marína, pre $n = 12$ Tamara.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vyriešenie prípadu $n = 6$ a 4 body za vyriešenie prípadu $n = 12$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Medzi všetkými desaťcifernými číslami deliteľnými jedenástimi, v ktorých sa žiadna cifra neopakuje, nájdite najmenšie a najväčšie.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Uvažované desaťciferné čísla označme $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, pričom a_9, a_8, ..., a_0 sú navzájom rôzne cifry, teda všetky cifry 0, 1, 2, ..., 9 v nejakom poradí. Ďalej označme $s_2 = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ súčet jeho cifier na párnych[1] miestach a $s_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ súčet cifier na nepárnych miestach.

Na zistenie deliteľnosti jedenástimi použijeme známe kritérium: Číslo $\overline{a_9a_8\dots a_1a_0}$ je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľný príslušný rozdiel s_2-s_1. Zrejme $|s_2 - s_1| \leqq (9+8+7+6+5)-(4+3+2+1+0) = 25$, čiže $-25 \leqq s_2 - s_1 \leqq 25$. Súčet $s_2 + s_1 = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ je nepárne číslo, preto musí byť nepárne aj číslo $s_2 - s_1$. Pre vyhovujúce číslo môžu teda nastať dve možnosti: $s_2 - s_1 = -11$ alebo $s_2 - s_1 = 11$.

V prvom prípade zo sústavy rovníc $s_2 + s_1 = 45$, $s_2 - s_1 = 11$ dostaneme $s_2 = 28$, $s_1 = 17$, v druhom naopak $s_2 = 17$, $s_1 = 28$.

Číslo 17 rozpíšeme všetkými možnými spôsobmi na súčet piatich navzájom rôznych cifier:

$$\begin{aligned}17 &= 9+5+2+1+0 = 9+4+3+1+0 =\\ &= 8+6+2+1+0 = 8+5+3+1+0 = 8+4+3+2+0 =\\ &= 7+6+3+1+0 = 7+5+4+1+0 = 7+5+3+2+0 = 7+4+3+2+1 =\\ &= 6+5+4+2+0 = 6+5+3+2+1.\end{aligned}$$

Medzi desaťcifernými číslami zapísanými všetkými desiatimi ciframi sú určite najväčšie tie, ktoré začínajú ciframi 987 alebo dokonca 9876. Vzhľadom na nájdené rozklady čísla 17 to zrejme nemožno dosiahnuť pre $s_1 = 17$, zato pre $s_2 = 17$ áno: stačí za s_2 zobrať súčet $17 = 8 + 6 + 2 + 1 + 0$, čo je zároveň jediná možnosť. Ostatné cifry už na základe tejto voľby doplníme jednoznačne tak, aby sme dostali číslo čo najväčšie. Hľadané najväčšie číslo je teda 9 876 524 130.

Najmenšie číslo nájdeme analogickým postupom. Keďže $a_9 \neq 0$, sú medzi uvažovanými číslami určite najmenšie tie, ktoré začínajú ciframi 102. Z nájdených rozkladov čísla 17 opäť vidíme, že to možno dosiahnuť jedine voľbou $s_1 = 17 = 6 + 5 + 3 + 2 + 1$. Tomu potom zodpovedá číslo (keďže poznáme všetky jeho cifry na nepárnych aj párnych miestach, je ich usporiadanie určené požiadavkou, aby výsledné číslo bolo najmenšie) 1 024 375 869.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte spomenuté kritérium deliteľnosti jedenástimi, t. j. že celé číslo je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľný súčet jeho cifier braných striedavo so znamienkom plus a mínus. [Kritérium vyplýva z toho, že 10 dáva po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako -1, teda jednotlivé rády 10^n dávajú zvyšok $(-1)^n$.]

N2. Dokážte, že žiadne desaťciferné číslo zložené z navzájom rôznych cifier, v ktorého dekadickom zápise sa striedajú párne a nepárne cifry, nie je deliteľné jedenástimi.

[1] Miesta číslujeme podľa mocnín desiatky v dekadickom zápise; pre riešenie samozrejme nie je podstatné, ktoré miesta označíme za párne a ktoré za nepárne, dôležité je len to, že sa párne a nepárne miesta striedajú.

N3. Určte počet päťciferných čísel zložených z navzájom rôznych a) nepárnych, b) párnych cifier a deliteľných jedenástimi. [a) 0, b) 16]

N4. Bez delenia ukážte, že číslo 20 111 102 je deliteľné jedenástimi. Potom k nemu nájdite najbližšie menšie a najbližšie väčšie číslo deliteľné jedenástimi zložené z rovnakých cifier ako dané číslo. [menšie 20 110 211, väčšie 20 111 201]

N5. Dokážte, že platí: Číslo $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je deliteľné jedenástimi číslo $\overline{a_9a_8} + \overline{a_7a_6} + \overline{a_5a_4} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}$.

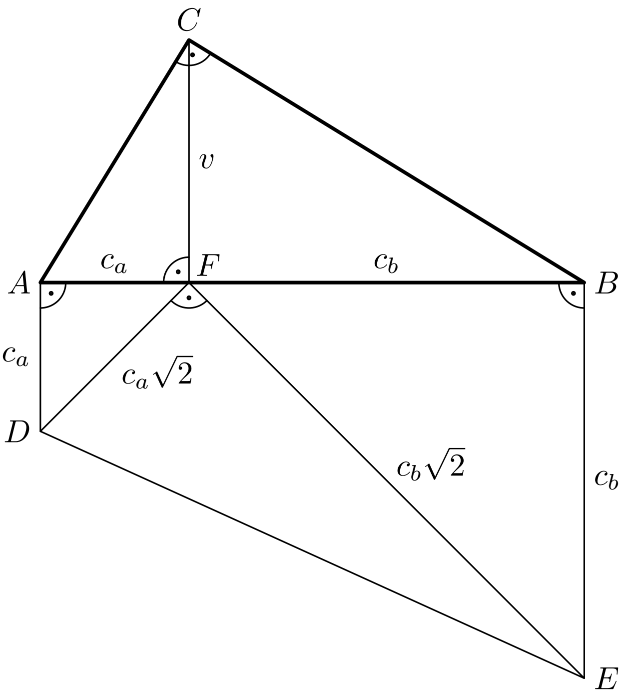
---

2. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, ktorého obsah označme P. Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB. Na kolmiciach na priamku AB, ktoré prechádzajú vrcholmi A a B, v polrovine opačnej k polrovine ABC uvažujme postupne body D a E, pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojuholníka DEF označme Q. Dokážte, že platí $P \geqq Q$, a zistite, kedy nastáva rovnosť.*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme úsečky (a ich dĺžky) ako na obr. 1. Keďže DAF a EBF sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, majú uhly pri ich preponami veľkosť 45°, takže $|\measuredangle DFE| = 90°$ a trojuholník DEF je pravouhlý s odvesnami, ktoré sú zároveň preponami oboch rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Pre obsahy P a Q oboch uvažovaných trojuholníkov preto platí

$$P = \frac{1}{2}(c_a + c_b)v \qquad \text{a} \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$



Obr. 1

Podľa Euklidovej vety o výške v danom pravouhlom trojuholníku platí $v = \sqrt{c_a c_b}$. Na dôkaz danej nerovnosti stačí teda overiť, že

$$\frac{1}{2}(c_a + c_b)\sqrt{c_a c_b} \geqq \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$

Po jednoduchej (ekvivalentnej) úprave dostaneme

$$c_a + c_b \geqq 2\sqrt{c_a c_b}, \qquad \text{čiže} \qquad (\sqrt{c_a} - \sqrt{c_b})^2 \geqq 0.$$

Keďže posledná nerovnosť očividne platí, je dôkaz tvrdenia ukončený. Rovnosť pritom nastane práve vtedy, keď $c_a = c_b$, t. j. práve vtedy, keď je daný pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení vyjdeme zo zrejmého poznatku, že trojuholník DEF je pravouhlý. Odvesny oboch uvažovaných pravouhlých trojuholníkov majú rovnaké kolmé priemety na priamku AB, pritom

$$|AF| = |AC|\cos\gamma_1 = |DF|\cos 45^\circ, \quad |BF| = |BC|\cos\gamma_2 = |EF|\cos 45^\circ,$$

kde γ_1, γ_2 označujú zodpovedajúce časti pravého uhla pri vrchole C, takže $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$. Keďže $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, vyplýva odtiaľ pre dvojnásobky oboch obsahov

$$\begin{aligned} 2P = |AC|\cdot|BC| = |DF|\cdot|EF|\cdot\frac{\cos 45^\circ}{\cos\gamma_1}\cdot\frac{\cos 45^\circ}{\cos\gamma_2} = \\ = 2Q\cdot\frac{1}{2\cos\gamma_1\sin\gamma_1} = 2Q\cdot\frac{1}{\sin 2\gamma_1} \geqq 2Q. \end{aligned}$$

Rovnosť $P = Q$ zrejme nastane práve vtedy, keď $\sin 2\gamma_1 = 1$, čiže $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$, teda práve vtedy, keď je daný trojuholník ABC rovnoramenný.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre každé dve kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geqq 2$.

N2. V obdĺžniku $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = a$, $|BC| = b$ označme E pätu kolmice spustenej z vrcholu B na uhlopriečku AC. Určte dĺžky úsečiek AE, CE, BE. [$|AE| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|CE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|BE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$]

N3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB je E päta výšky z vrcholu C, D päta výšky z bodu E na stranu AC a F päta výšky z bodu E na stranu BC. Dokážte, že obsah štvoruholníka $CDEF$ je nanajvýš rovný polovici obsahu trojuholníka ABC. Kedy nastane rovnosť? [Keďže trojuholníky AED a EBF sú podobné trojuholníku ABC s koeficientmi podobnosti α a $1-\alpha$, je obsah pravouholníka $CDEF$ rovný $S - (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)S = 2\alpha(1-\alpha)S$, pričom S označuje obsah daného trojuholníka ABC. Požadovaná nerovnosť je tak ekvivalentná s nerovnosťou $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$, čiže $(2\alpha - 1)^2 \geqq 0$.]

---

3. *Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc*

$$\begin{aligned} x\cdot\lfloor y\rfloor &= 7,\\ y\cdot\lfloor x\rfloor &= 8. \end{aligned}$$

(Zápis $\lfloor a\rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.) *(Pavel Novotný)*

Riešenie. Z druhej rovnice vyplýva, že $\lfloor x\rfloor \neq 0$, a $y = 8/\lfloor x\rfloor$ je tým pádom nenulové číslo v absolútnej hodnote nie väčšie ako 8. Po dosadení do prvej rovnice dostaneme rovnicu

$$x\cdot\left\lfloor\frac{8}{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = 7, \tag{1}$$

ktorá je v skutočnosti s danou sústavou ekvivalentná v nasledujúcom zmysle: ak priradíme ľubovoľnému riešeniu x rovnice (1) hodnotu $y = 8/\lfloor x\rfloor$, bude zrejme dvojica (x, y) riešením pôvodnej sústavy.

Budeme preto postupne hľadať riešenia rovnice (1) pre jednotlivé hodnoty celých čísel $a = \big\lfloor 8/\lfloor x\rfloor\big\rfloor \in \{-8, \dots, -1, 1, \dots, 8\}$ tak, že vypočítame $x = 7/a$, $y = 8/\lfloor x\rfloor$ a overíme, či $\lfloor y\rfloor = a$. Navyše je vzhľadom na nerovnosť $\lfloor x\rfloor \neq 0$ z rovnice (1) zrejmé, že $a \neq 8$.

Pre $a = -8$ je $x = -\frac{7}{8}$, $\lfloor x\rfloor = -1$ a $y = -8$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -7$ je $x = -1 = \lfloor x\rfloor$ a $y = -8$, teda $\lfloor y\rfloor < a$.

Pre $a = -6$ je $x = -\frac{7}{6}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a = -5$ je $x = -\frac{7}{5}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a = -4$ je $x = -\frac{7}{4}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -3$ je $x = -\frac{7}{3}$, $\lfloor x\rfloor = -3$ a $y = -\frac{8}{3}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -2$ je $x = -\frac{7}{2}$, $\lfloor x\rfloor = -4$ a $y = -2$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -1$ je $x = -7 = \lfloor x\rfloor$ a $y = -\frac{8}{7}$, teda $\lfloor y\rfloor < a$.

Pre $a = 1$ je $x = 7 = \lfloor x\rfloor$ a $y = \frac{8}{7}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = 2$ je $x = \frac{7}{2}$, $\lfloor x\rfloor = 3$ a $y = \frac{8}{3}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = 3$ je $x = \frac{7}{3}$, $\lfloor x\rfloor = 2$ a $y = 4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a \in \{4, 5, 6, 7\}$ je $\lfloor x\rfloor = 1$ a $y = 8$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Záver. Sústava rovníc má 6 riešení, sú nimi usporiadané dvojice $\left(-\frac{7}{8}, -8\right)$, $\left(-\frac{7}{4}, -4\right)$, $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)$, $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$, $\left(7, \frac{8}{7}\right)$ a $\left(\frac{7}{2}, \frac{8}{3}\right)$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu: a) $\lfloor x\rfloor^2 = 4$, b) $\lfloor x^2\rfloor = 4$, c) $\left\lfloor \frac{\lfloor x\rfloor + 3}{2}\right\rfloor = 4$, d) $\left\lfloor \frac{2011}{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = 4$. [a) $x \in \langle -2, -1) \cup \langle 2, 3)$, b) $2 \leqq |x| < \sqrt{5}$, c) $x \in \langle 5, 7)$, d) $x \in \langle 403, 503)$]

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc $xy = 2$, $x\lfloor y\rfloor = 4$. [Zrejme $x < 0$, $y < 0$. Dokážte ďalej, že $\lfloor -u\rfloor = -\lfloor u\rfloor$ pre každé celé číslo a $\lfloor -u\rfloor = -\lfloor u\rfloor - 1$ inak. Dobre je to tiež vidno z grafu funkcie $y = \lfloor x\rfloor$. Vyjde $x = -4$, $y = -\frac{1}{2}$.]

N3. Dokážte, že pre každé reálne číslo x a každé celé číslo k platí $\lfloor x + k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$.

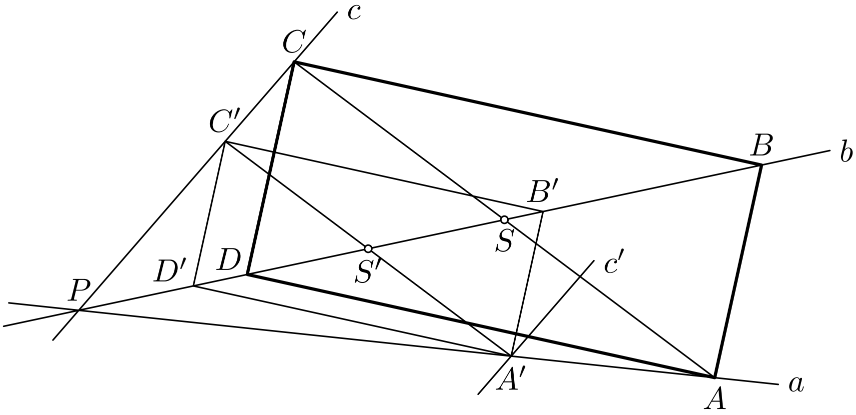
---

4. *Dané sú dve rôznobežky a, c prechádzajúce bodom P a bod B, ktorý na nich neleží. Zostrojte pravouholník $ABCD$ s vrcholmi A, C a D postupne na priamkach a, c a PB.*
(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Označme S priesečník uhlopriečok AC a BD, ktorý má ležať na priamke $b = PB$. Pritom nemôže byť $S = P$, pretože potom by na priamke a ležal aj vrchol C. Taká možnosť odporuje zadaniu.

Preto ak zvolíme na priamke b ľubovoľný bod S', $S' \neq P$, existuje práve jedna rovnoľahlosť so stredom P, ktorá zobrazí bod S na S'. V tejto rovnoľahlosti sa pravouholník $ABCD$ zobrazí na pravouholník $A'B'C'D'$ s priesečníkom uhlopriečok S', pritom $A' \in a$, $B', D' \in b$ a $C' \in c$. Keďže vrcholy A', C' sú súmerne združené podľa zvoleného stredu S' (obr. 2), zostrojíme bod A' ako priesečník priamky a s priamkou c', ktorá je súmerne združená s priamkou c podľa stredu S'. Potom už ľahko z bodov A', S' určíme bod C' a napokon – vďaka pravým uhlom $A'B'C'$ a $A'D'C'$ – nájdeme body B',

D' ako priesečníky priamky b s Tálesovou kružnicou nad priemerom $A'C'$. Pritom tieto dva priesečníky môžeme označiť ako B', D' v ľubovoľnom poradí s výnimkou prípadu, keď jeden z priesečníkov splynie s bodom P; v takom prípade môže byť jedine $D' = P$, lebo z $B \neq P$ vyplýva $B' \neq P$. Nakoniec zobrazíme pravouholník $A'B'C'D'$ v „spätnej" rovnoľahlosti, v ktorej $B' \mapsto B$. Tak dostaneme štvoruholník $ABCD$, ktorý má zrejme všetky požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskusia. Pre zvolený bod $S' \in b$, $S' \neq P$, body A' a C' existujú a sú jediné (priamky a, c' sú totiž rôznobežky a žiadna z nich stredom súmernosti S' neprechádza). Kružnica nad priemerom $A'C'$ má kladný polomer, a preto má s priamkou b prechádzajúcou jej stredom S' vždy dva priesečníky. Ak sú oba rôzne od bodu P, má úloha dve riešenia. Jeden z týchto dvoch priesečníkov splynie s bodom P práve vtedy, keď bude uhol $A'PC'$ pravý, teda práve vtedy, keď dané priamky a, c budú navzájom kolmé. V takom prípade bude $D' = P$ a úloha bude mať jediné riešenie (vrchol D splynie s bodom P).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Sú dané dve rôznobežky a, c a bod S neležiaci na žiadnej z nich. Zostrojte štvorec $ABCD$ so stredom S tak, aby bod A ležal na priamke a a bod C na priamke c. [Zostrojíme priamku a' ako obraz priamky a v stredovej súmernosti so stredom S, prienik priamok a', c dáva bod C.]

N2. Sú dané dve rôznobežky a, c, ktorých priesečník P je mimo výkresu, a bod B neležiaci na žiadnej z nich. Zostrojte priamku b prechádzajúcu bodmi B, P. [Zostrojíme ľubovoľný trojuholník ABC, kde $A \in a$ a $C \in c$, a potom zostrojíme trojuholník $A'B'C'$, ktorý bude jeho obrazom v nejakej rovnoľahlosti so stredom v bode P.]

N3. Daná je úsečka AB. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB tak, aby $|AC| = 2\cdot|BC|$. [Zostrojíme trojuholník $A'B'C'$ s požadovanými vlastnosťami a potom pomocou rovnoľahlosti (napr. so stredom v jednom z vrcholov) zostrojíme trojuholník, ktorého prepona bude mať dĺžku $|AB|$.]

---

5. *V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.*

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

(Ján Mazák)

Riešenie. a) Nech m je počet klebetníkov. Keďže každý klebetník je v spojení s tromi klebetnicami, je medzi všetkými celkom $3m$ spojení. A keďže k rovnakému výsledku musíme dôjsť, keď spočítame všetky spojenia jednotlivých klebetníc, z ktorých každá je v spojení s tromi klebetníkmi, je klebetníc tiež m.

b) Predpokladajme, že po odsťahovaní jedného z klebetníkov sa sieť rozpadne na niekoľko súvislých častí. To znamená, že odsťahovaný klebetník bol v spojení s aspoň jednou klebetnicou v každej zo vzniknutých častí, inak by príslušná časť nebola prepojená so zvyškom siete už pred jeho odchodom. Odtiaľ je ďalej zrejmé, že vzniknuté časti sú nanajvýš tri, pričom počet klebetníc, ktoré boli v spojení s odsťahovaným klebetníkom, musí v každej z nich byť 1 alebo 2.

Uvažujme ľubovoľnú z častí, na ktoré sa sieť rozpadla, a označme m a n prislúchajúce počty klebetníkov a klebetníc v tejto časti. Ak teraz spočítame počet spojení všetkých klebetníkov v tejto časti, dostaneme $3m$. Vzhľadom na to, že jedna alebo dve klebetnice o jedno spojenie prišli, je celkový počet ich spojení s klebetníkmi $3n - 2$ alebo $3n - 1$. Ani jedno z týchto čísel však nie je deliteľné tromi, preto sa nemôže nikdy rovnať celkovému počtu spojení klebetníkov vo zvolenej časti. To je spor, ktorý dokazuje tvrdenie b) úlohy.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V sieti na šírenie klebiet je m klebetníkov a n klebetníc. Každý z klebetníkov je v spojení s a klebetnicami a každá klebetnica je v spojení s b klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria. Aký je vzťah medzi premennými a, b, m, n? [$ma = nb$]

N2. Vytvorte model súvislej siete opísanej v zadaní úlohy pre 3, 4, 5, ... klebetníkov a klebetníc. Ukážte v tomto modeli, že po odstránení ktoréhokoľvek klebetníka zostane sieť súvislá.

N3. Pre aký počet klebetníkov a klebetníc môže byť sieť opísaná v zadaní úlohy nesúvislá? [pre 6, 7, 8, ...]

N4. V súvislej sieti na šírenie klebiet je každý klebetník v spojení s aspoň a) jedným, b) dvoma ďalšími klebetníkmi. Zostane sieť súvislá, ak sa jeden z nich odsťahuje? [a) aj b): môže, ale nemusí zostať súvislá, záleží na tvare siete]

---

6. *Anna a Boris hrajú kartovú hru. Každý z nich má päť kariet s hodnotami* 1 *až* 5 *(z každej jednu). V každom z piatich kôl obaja vyložia jednu kartu a kto má vyššie číslo, získa bod. V prípade kariet s rovnakými číslami nezíska bod nikto. Použité karty sa do hry nevracajú. Ten, kto získa na konci viac bodov, vyhral. Koľko percent zo všetkých možných priebehov takej hry skončí výhrou Anny?* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Opísaná hra je zrejme spravodlivá v tom zmysle, že obaja hráči majú rovnaký počet možností ako vyhrať. Aby sme zistili požadovaný počet, stačí zistiť, koľkými spôsobmi môže nastať remíza, teda jeden z výsledkov 0 : 0, 1 : 1 a 2 : 2.

Prípad 0 : 0 nastane, ak obaja hráči vyložia v každom kole rovnaké karty. Takých možností je $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Výsledok 1 : 1 znamená, že hráči vyložia rovnaké karty v troch kolách a v dvoch zvyšných kolách vyložia dve rôzne karty (x, y), každý v inom poradí. Každý taký výsledok je teda jednoznačne určený poradím kariet jedného z hráčov a výberom kôl, v ktorých druhý hráč zahrá rovnako. Tri kolá z piatich možno vybrať 10 spôsobmi a päť kariet možno usporiadať 5! spôsobmi. Výsledok 1 : 1 tak nastane v $10 \cdot 5!$ prípadoch.

Ostáva vyšetriť, kedy nastane výsledok 2 : 2. Tú kartu x, ktorú vyložia hráči v jednom z piatich kôl obaja naraz, je možné vybrať 5 spôsobmi. Anne aj Borisovi potom zvýšia štyri karty $a < b < c < d$. Keďže na poradí kôl nezáleží, spočítajme najprv, koľko je možností v prípade, že Anna vyloží karty x, a, b, c, d v tomto poradí. Aby nedošlo k ďalšej remíze, musí Anna získať ďalší bod v poslednom kole za kartu d, zatiaľ čo Boris musí získať bod v druhom kole, keď Anna vyloží kartu a. Preto stačí zistiť, aké má Boris v treťom a štvrtom kole možnosti, aby tieto dve kolá skončili 1 : 1.

V týchto kolách musí Boris vyložiť jednu z dvojíc (a,d), (c,a), (c,b), (d,a), (d,b), ktoré možno doplniť kartami pre druhé a piate kolo tak, aby v nich nenastala remíza, do celkom siedmich poradí:

$$(x,b,a,d,c),\ (x,c,a,d,b),\ (x,d,c,a,b),\ (x,d,c,b,a),\ (x,b,d,a,c),$$
$$(x,c,d,a,b),\ (x,c,d,b,a).$$

Anna môže karty x, a, b, c, d vyložiť $5!$ spôsobmi. Výsledok 2 : 2 tak nastane v $5\cdot 7\cdot 5!$ prípadoch.

Celkovo môžu ako Anna, tak Boris vyložiť karty $5!$ spôsobmi, to je dokopy $5!^2$ možností. Keďže počet všetkých možných priebehov hry, v ktorých nastane remíza, je rovný $5! + 10\cdot 5! + 5\cdot 7\cdot 5! = 5!\cdot 46$, je počet možných výhier každého z nich $\frac{1}{2}(5!^2 - 5!\cdot 46) = 5!\cdot 37$. Výhrou Anny teda skončí

$$\frac{5!\cdot 37}{5!^2} = \frac{37}{120} \approx 0{,}31 = 31\,\%$$

všetkých možných hier.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aké sú možné bodové výsledky kartovej hry v zadanej úlohe? [4 : 1, 1 : 4, 3 : 2, 2 : 3, 3 : 1, 1 : 3, 2 : 2, 2 : 1, 1 : 2, 1 : 1, 0 : 0]

N2. Koľkými spôsobmi mohol prebehnúť „skrátený“ volejbalový set medzi družstvami A a B, ak sa hral do 5 bodov, zvíťazilo družstvo A a vieme, že víťaz vyhral aspoň o dva body? (Zaujíma nás nielen výsledok, ale celý priebeh, ako body pribúdali.) [$\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} = 1 + 5 + 15 + 35 = 56$, pri takých malých hodnotách sa dá počítať aj bez kombinačných čísel.]

N3. Aký je počet desaťciferných čísel zložených z rôznych cifier, v ktorých sa striedajú párne a nepárne cifry? Koľko je to percent zo všetkých desaťciferných čísel zložených z rôznych cifier? [$5!\cdot 5! + 4\cdot 4!\cdot 5! = 9\cdot 4!\cdot 5!$, $\frac{9\cdot 4!\cdot 5!}{9\cdot 9!} = \frac{1}{2\cdot 63} \approx 0{,}008 = 0{,}8\,\%$]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. Jaroslav Zhouf, 2. Jaroslav Švrček, 3. Pavel Novotný, 4. Jaromír Šimša, 5. Ján Mazák, 6. Tomáš Jurík

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaroslav Zhouf

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1. *V obore celých čísel vyriešte rovnicu*

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Vynásobením oboch strán danej rovnice štyrmi dostaneme

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y = 16.$$

Výraz na ľavej strane takto upravenej rovnice doplníme na súčet druhých mocnín dvoch dvojčlenov. Obdržíme tak

$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 18.$$

Stačí teda vyšetriť všetky rozklady čísla 18 na súčet dvoch kladných nepárnych čísel, pretože čísla $2x + 1$ a $2y + 1$ nie sú deliteľné dvoma pre žiadne celé x a y.

Uvažujme preto nasledujúce rozklady:

$$18 = 1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9.$$

Medzi uvedenými súčtami je iba jeden ($18 = 9 + 9$) súčtom druhých mocnín dvoch celých čísel. Môžu teda nastať nasledujúce štyri prípady:

$$\begin{array}{llll}
2x + 1 = 3, & 2y + 1 = 3, & \text{t. j. } x = 1, & y = 1,\\
2x + 1 = 3, & 2y + 1 = -3, & \text{t. j. } x = 1, & y = -2,\\
2x + 1 = -3, & 2y + 1 = 3, & \text{t. j. } x = -2, & y = 1,\\
2x + 1 = -3, & 2y + 1 = -3, & \text{t. j. } x = -2, & y = -2.
\end{array}$$

Záver. Danej rovnici vyhovujú práve štyri dvojice celých čísel (x, y), a to $(1, 1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$ a $(-2, -2)$.

Iné riešenie. Danú rovnicu možno upraviť na tvar $x(x + 1) + y(y + 1) = 4$, z ktorého vidno, že číslo 4 je nutné rozložiť na súčet dvoch celých čísel, z ktorých každé je súčinom dvoch po sebe idúcich celých čísel. Keďže najmenšie hodnoty výrazu $t(t+1)$ pre kladné aj záporné celé t sú $0, 2, 6, 12, \ldots$, do úvahy prichádza iba rozklad $4 = 2 + 2$, takže každá z neznámych x, y sa rovná jednému z čísel 1 či -2 – jediných celých čísel t, pre ktoré $t(t+1) = 2$. Navyše je jasné, že naopak každá zo štyroch dvojíc (x, y) zostavených z čísel 1, -2 je riešením danej úlohy.

Za systematické a úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uhádnutie len jednej dvojice (x, y), ktorá je riešením, nedávajte žiadny bod, za ďalšie jedno uhádnuté riešenie dajte 1 bod, za uhádnutie všetkých štyroch riešení dajte 2 body. Pri správnom postupe naopak strhnite 1 bod za každé chýbajúce riešenie. Jednoznačnosť rozkladu čísla 18 na súčet dvoch druhých mocnín je natoľko zrejmá, že ju nie je nutné zdôvodňovať (ako v tu uvedenom riešení).

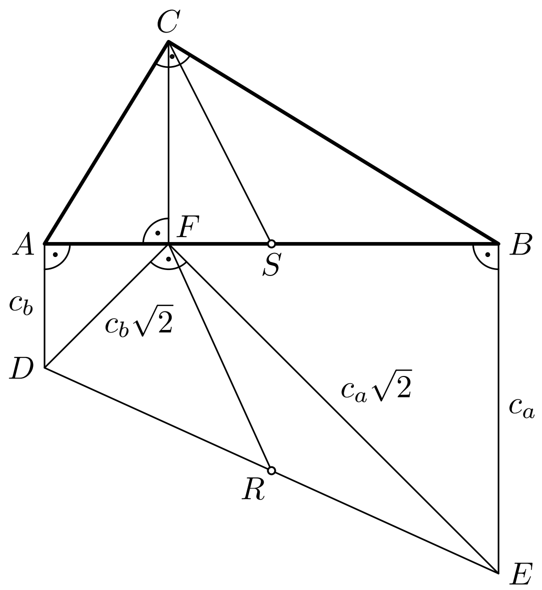
2. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB. Na kolmiciach na priamku AB, ktoré prechádzajú vrcholmi A a B, sú v polrovine opačnej k polrovine ABC zvolené postupne body D a E, pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Označme ďalej R stred úsečky DE. Dokážte, že platí nerovnosť $|RF| \geqq |CF|$ a zistite, kedy nastane rovnosť.*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Keďže DAF a EBF sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, majú uhly pri ich preponách veľkosť 45°, takže trojuholník DEF je pravouhlý. Označme S stred úsečky AB (obr. 1). Keďže stred prepony pravouhlého trojuholníka je zároveň stredom jeho opísanej kružnice, zrejme platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$ a $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$. Pritom AD a BE sú dve rovnobežné priamky, ktorých vzdialenosť je rovná $|AB|$, a preto $|DE| \geqq |AB|$. Platí teda

$$|RF| = \frac{1}{2}|DE| \geqq \frac{1}{2}|AB| = |CS| \geqq |CF|,$$

čo sme chceli dokázať.



Obr. 1

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $|DE| = |AB|$ a $|CS| = |CF|$, teda práve vtedy, keď $S = F$ (potom je aj $|AD| = |AS| = |BS| = |BE|$ a $|DE| = |AB|$), čiže práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Označme $c_a = |BF|$ a $c_b = |AF|$. Vzhľadom na to, že $|AD| = c_b$ a $|BE| = c_a$ (obr. 1), vidíme, že pre dĺžku prepony DE v pravouhlom trojuholníku DEF (poz. riešenie 2. úlohy domáceho kola) dostaneme použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre dvojicu kladných čísel c_a^2 a c_b^2 a ďalej použitím Euklidovej vety o výške CF v pravouhlom trojuholníku ABC odhad

$$|DE| = \sqrt{2(c_a^2 + c_b^2)} \geqq \sqrt{2 \cdot 2c_a c_b} = 2\sqrt{c_a c_b} = 2|CF|.$$

Keďže v pravouhlom trojuholníku DEF platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$, dostávame využitím uvedenej nerovnosti

$$2|RF| = |DE| \geqq 2|CF| \quad \text{a odtiaľ} \quad |RF| \geqq |CF|,$$

čo sme chceli dokázať.

Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa obe priemerované hodnoty c_a^2 a c_b^2 rovnajú, t. j. keď platí $c_a = c_b$, čo nastane práve v prípade pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC.

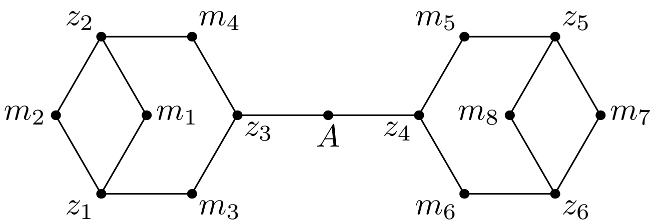
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vynechanie podmienky, kedy nastane rovnosť, strhnite 2 body. Len za uhádnutie, kedy nastane rovnosť, dajte 1 bod.

---

3. *V istom meste majú vybudovanú súvislú sieť na šírenie klebiet (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). V nej si každý klebetník vymieňa informácie s dvoma klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s troma klebetníkmi. Predpokladajme, že v uvedenej sieti sa nájde taký muž aj taká žena, že po prípadnom odsťahovaní ktorejkoľvek z týchto dvoch osôb prestane byť sieť súvislou. Nájdite najmenší možný počet členov tejto siete.* (Pavel Calábek)

Riešenie. Označme A toho klebetníka, po ktorého odsťahovaní sa sieť rozpadne, a M_1, Z_1 počty klebetníkov a klebetníc v jednej oddelenej skupine, M_2 a Z_2 v druhej. Keďže v každej skupine existuje aspoň jedna klebetnica a tá je ešte stále v spojení s aspoň dvoma klebetníkmi, je $M_1 \geqq 2$ a $M_2 \geqq 2$. V každej skupine medzi počtami klebetníc a klebetníkov platia teraz vzťahy $3Z_1 - 1 = 2M_1$ a $3Z_2 - 1 = 2M_2$. Rovnica tvaru $3z - 1 = 2m$ nemá celočíselné riešenie z ani pre $m = 2$, ani pre $m = 3$, až pre $m = 4$ vychádza celé $z = 3$. Najmenší možný počet členov siete tak môže byť $M_1 = M_2 = 4$, $Z_1 = Z_2 = 3$.

Takú sieť ľahko zostrojíme podľa obr. 2, v ktorom z_i sú klebetnice a m_i klebetníci.



Obr. 2

Zároveň vidíme, že uvedená sieť sa stane nesúvislou po odsťahovaní jednej z klebetníc z_3 či z_4. Najmenší počet členov siete s požadovanou vlastnosťou je preto 15.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak bude nájdený len minimálny odhad $Z_1 = Z_2 = 3$, $M_1 = M_2 = 4$ a nebude uvedená konkrétna konfigurácia, dajte 4 body. Ak bude nájdená iba konkrétna konfigurácia s 15 členmi a nebude dokázané, že menší počet členov siete byť nemôže, dajte len 2 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaroslav Zhouf
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Daných je* 2012 *kladných čísel menších ako* 1, *ktorých súčet je* 7. *Dokážte, že tieto čísla sa dajú rozdeliť na štyri skupiny tak, aby súčet čísel v každej skupine bol aspoň* 1.
(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Dané čísla označme $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$. Zrejme existuje index $k \geqq 1$ taký, že

$$a_1 + \dots + a_k < 1 \leqq a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} < 2.$$

Čísla $a_1, \dots, a_{k+1}$ tvoria prvú požadovanú skupinu. Ďalej zrejme existuje index $l \geqq \geqq k + 2$ taký, že

$$a_{k+2} + \dots + a_l < 1 \leqq a_{k+2} + \dots + a_l + a_{l+1} < 2.$$

Čísla $a_{k+2}, \dots, a_{l+1}$ tvoria druhú požadovanú skupinu. Analogicky zrejme existuje index $m \geqq l + 2$ taký, že

$$a_{l+2} + \dots + a_m < 1 \leqq a_{l+2} + \dots + a_m + a_{m+1} < 2.$$

Čísla $a_{l+2}, \dots, a_{m+1}$ tvoria tretiu požadovanú skupinu. Keďže $a_1 + \dots + a_{m+1} < 6$, platí $a_{m+2} + \dots + a_{2012} \geqq 1$, takže čísla $a_{m+2}, \dots, a_{2012}$ tvoria štvrtú požadovanú skupinu.

Za systematické a úplné riešenie udeľte 6 bodov.

---

2. *Určte, koľkými spôsobmi možno vrcholom pravidelného 9-uholníka $ABCDEFGHI$ priradiť čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bolo priradené inému vrcholu a aby súčet čísel priradených každým trom susedným vrcholom bol deliteľný tromi.*
(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Najskôr si uvedomme, že čísla 27, 57 a 87 sú deliteľné tromi, čísla 37, 67 a 97 dávajú po delení tromi zvyšok 1 a čísla 17, 47 a 77 dávajú po delení tromi zvyšok 2. Označme $\overline{0} = \{27, 57, 87\}$, $\overline{1} = \{37, 67, 97\}$ a $\overline{2} = \{17, 47, 77\}$. Uvažujme teraz pravidelný deväťuholník $ABCDEFGHI$. Pri skúmaní deliteľnosti tromi súčtu trojíc prirodzených čísel priradených trom susedným vrcholom uvažovaného deväťuholníka stačí uvažovať namiesto daných čísel iba ich zvyšky po delení tromi. Pritom tri čísla môžu dať v súčte číslo deliteľné tromi jedine tak, že buď všetky tri dávajú po delení tromi rovnaký zvyšok (patria do rovnakej zvyškovej triedy), alebo sú každé z inej zvyškovej triedy. Keby však boli tri čísla priradené po sebe idúcim vrcholom z rovnakej zvyškovej triedy, muselo by z tej istej triedy byť aj číslo priradené nasledujúcemu vrcholu (ktorýmkoľvek smerom), a tým pádom aj všetky ďalšie čísla. Takých deväť čísel k dispozícii nemáme, preto ľubovoľným trom susedným vrcholom musia byť priradené čísla z navzájom rôznych zvyškových tried.

Predpokladajme najskôr, že vrcholu A je priradené niektoré číslo z množiny $\overline{0}$. V takom prípade možno vrcholom uvažovaného deväťuholníka vzhľadom na podmienky úlohy priradiť zvyškové triedy $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ iba dvoma spôsobmi podľa toho, ktorému z dvoch susedných vrcholov vrcholu A priradíme $\overline{1}$ a ktorému $\overline{2}$. Ďalším vrcholom sú potom už zvyškové triedy vzhľadom na podmienku deliteľnosti priradené jednoznačne. Výsledné priradenie môžeme zapísať ako

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}),$$

alebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}).$$

Podobne, ak je vrcholu A priradená zvyšková trieda $\overline{1}$, platí buď

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}),$$

alebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}).$$

Napokon, ak je vrcholu A priradená zvyšková trieda $\overline{2}$, platí buď

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}),$$

alebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}).$$

Podľa počtu možností, ako postupne vyberať čísla z jednotlivých zvyškových tried, každému z uvedených prípadov prislúcha podľa pravidla súčinu práve

$$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 6^3$$

možností. Vzhľadom na to, že iný prípad okrem šiestich uvedených nemôže nastať, vidíme, že hľadaný počet možností, ako priradiť vrcholom uvažovaného deväťuholníka daných deväť čísel, je

$$6 \cdot 6^3 = 6^4 = 1\,296.$$

Za úplné riešenie udeľte 6 bodov, z toho 2 body za zdôvodnenie, že čísla priradené trom susedným vrcholom majú navzájom rôzne zvyšky po delení tromi, 2 body za uvedenie šiestich možností, ako môžu byť zvyškové triedy rozdelené, a 2 body za správny výpočet počtu možností.

Za každé vynechanie jedného zo šiestich prípadov strhnite 1 bod. Za chybne spočítaný počet možností strhnite 2 body; za menej závažnú numerickú chybu strhnite 1 bod. Za správny výpočet počtu možností, ktoré riešiteľ uvažoval, aj keď neuviedol všetky možnosti, dajte 2 body.

---

3. *Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K. Úsečku AK otočíme o $90°$ do polohy AP a úsečku BK otočíme o $90°$ do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC.*

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

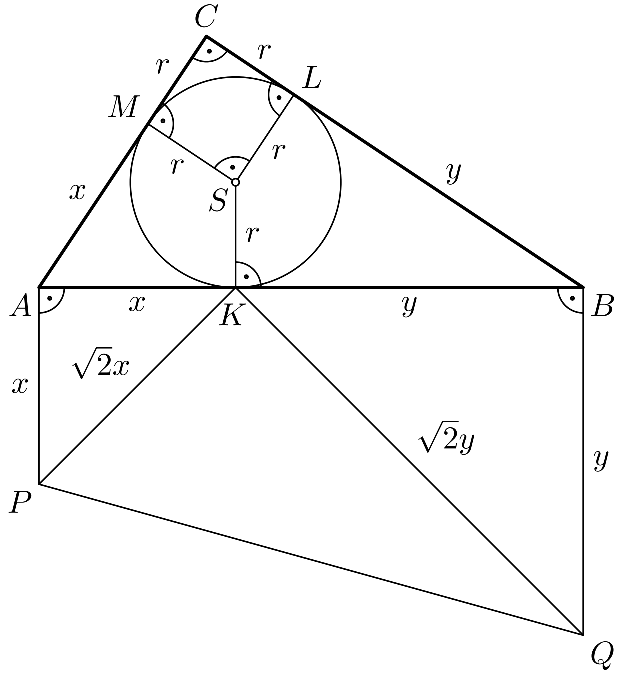
b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK. Kedy nastane rovnosť obvodov?

(*Jaroslav Zhouf*)

Riešenie. a) Označme S stred a r polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a L, M body dotyku tejto kružnice postupne so stranami BC, CA (obr. 1). Ak označíme $|AK| = x$, $|BK| = y$, tak $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$.

Keďže oba uhly AKP, BKQ majú veľkosť $45°$, je trojuholník PQK pravouhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 1

Štvoruholník $SLCM$ je štvorec so stranou dĺžky r a $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABS, BCS a CAS, teda

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojuholníka ABC je zároveň rovný

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odtiaľ dostávame $S_{ABC} = xy$, čiže $S_{ABC} = S_{PQK}$, čo sme mali dokázať.

b) V trojuholníku ABC sú dĺžky strán $a = y + r$, $b = x + r$, $c = x + y$. Obvod trojuholníka ABC je $a + b + |AB|$, obvod trojuholníka PQK je $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$.

Zrejme platí $|AB| \leqq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdialenosťou rovnobežiek AP, PQ, obr. 1). Rovnosť nastane jedine v prípade $|AP| = |BQ|$, čiže $x = y$.

Ešte dokážeme, že $a + b \leqq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$, teda že $a + b \leqq c\sqrt{2}$. Posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením na druhú, pretože obe jej strany sú kladné. Dostaneme tak $a^2 + b^2 + 2ab \leqq 2c^2$. Keďže v pravouhlom trojuholníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, máme dokázať nerovnosť $2ab \leqq a^2 + b^2$, ktorá je však ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (a - b)^2$. Tá platí pre všetky reálne čísla a, b a rovnosť v nej nastane jedine pre $a = b$, t. j. $x = y$.

Celkovo vidíme, že obvod trojuholníka ABC je menší alebo rovný obsahu trojuholníka PQK a rovnosť nastane práve vtedy, keď je pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za časť a) a 3 body za časť b). V časti b) za vynechanie podmienky, kedy nastane rovnosť, strhnite 1 bod.

---

4. *Nájdite všetky reálne čísla x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc*

$$x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor = 5,$$
$$y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = -6.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.) (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Nutne platí $xy \neq 0$. Zrejme tiež $x \neq y$; keby bolo $x = y$, dostali by sme $\lfloor x/y \rfloor = \lfloor y/x \rfloor = 1$, takže z prvej rovnice by vyšlo $x = 5$ a z druhej rovnice $y = -6$, čo je v rozpore s rovnosťou $x = y$. Podobne nemôže byť ani $x = -y$, takže dokonca $|x| \neq |y|$.

Ak by obe neznáme mali rovnaké znamienka, bolo by jedno z čísel x/y, y/x z intervalu $(0, 1)$, takže jeho celá časť by bola 0, čo nevedie k riešeniu. Jedna z neznámych teda musí byť kladná a druhá záporná a obe celé časti v rovniciach sú záporné. Z nich preto tiež vyplýva, že $x < 0$ a $y > 0$.

Znamienka čísel x, y sú rôzne a absolútne hodnoty týchto čísel sú tiež rôzne, preto práve jedno z čísel x/y, y/x je z intervalu $(-1, 0)$, a jeho celá časť je teda -1.

Najskôr preskúmame prípad $\lfloor x/y \rfloor = -1$. Z druhej zadanej rovnice dostaneme $y = 6$. Prvá zadaná rovnica má potom tvar $\lfloor 6/x \rfloor = 5/x$. Ak navyše využijeme definíciu celej časti, dostaneme

$$\frac{5}{x} = \left\lfloor \frac{6}{x} \right\rfloor \leqq \frac{6}{x}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{5}{x} \leqq \frac{6}{x}.$$

Posledná nerovnica však nemôže pre záporné číslo x platiť, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $5 \geqq 6$. Daná sústava rovníc nemá teda v prípade $\lfloor x/y \rfloor = -1$ riešenie.

Ostáva prípad $\lfloor y/x \rfloor = -1$. Z prvej zadanej rovnice máme $x = -5$. Druhá zadaná rovnica má potom tvar $\lfloor -5/y \rfloor = -6/y$. Podľa definície celej časti teda platí

$$\frac{-5}{y} < \left\lfloor \frac{-5}{y} \right\rfloor + 1 = \frac{-6}{y} + 1, \quad \text{t. j.} \quad \frac{-5}{y} < \frac{-6}{y} + 1,$$

odkiaľ po vynásobení kladným číslom y dostaneme $y > 1$. Keď využijeme definíciu celej časti aj pre rovnicu $\lfloor y/-5 \rfloor = -1$, dostaneme

$$-1 \leqq \frac{y}{-5} < 0, \quad \text{čiže} \quad 0 < y \leqq 5.$$

Spojením oboch podmienok pre neznámu y tak dostávame $1 < y \leqq 5$. Naopak, pre každé také y a $x = -5$ je prvá rovnica sústavy splnená. Túto podmienku postupne upravíme na ekvivalentné nerovnosti $1 > 1/y \geqq \frac{1}{5}$ a $-5 < -5/y \leqq -1$. Z tej poslednej vyplýva, že výraz $\lfloor -5/y \rfloor$ môže nadobúdať jedine hodnoty $-5, -4, -3, -2, -1$.

Z druhej rovnice upravenej na tvar $y = -6/\lfloor -5/y \rfloor$ tak vyplýva, že neznáma y môže nadobúdať jedine hodnoty $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 6. Posledná z nich však (na rozdiel od prvých štyroch) nespĺňa odvodené kritérium $1 < y \leqq 5$ platnosti prvej rovnice sústavy. Či je pre prvé štyri hodnoty splnená druhá rovnica sa musíme presvedčiť aspoň tak, že overíme hodnotu výrazu $\lfloor -5/y \rfloor$, ktorá nás k nim doviedla. Pre y rovné postupne $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3 je zlomok $-5/y$ postupne rovný $-\frac{25}{6}$, $-\frac{10}{3}$, $-\frac{5}{2}$ a $-\frac{5}{3}$ s prislúchajúcimi celými časťami skutočne -5, -4, -3, -2.

Záver. Zhrnutím všetkých úvah dostávame, že riešením danej sústavy sú nasledujúce dvojice čísel (x, y): $(-5, \frac{6}{5})$, $(-5, \frac{3}{2})$, $(-5, 2)$, $(-5, 3)$.

Za úplné riešenie udeľte 6 bodov, z toho 1 bod za zistenie, že obe celé časti v rovniciach sú nutne záporné, a ďalšie dva body za zistenie, že musí platiť $x = -5$ alebo $y = 6$. Pri postupe založenom len na experimentovaní so zvolenými číslami za skúšaním nájdené všetky štyri riešenia dajte 2 body, ak by niektoré riešenie chýbalo, udeľte 1 bod, za nájdenie jediného riešenia nedávajte žiadny bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Jaroslav Zhouf
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Označme n súčet všetkých desaťciferných čísel, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, …, 9. Zistite zvyšok po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Najskôr vypočítame hodnotu čísla n, potom už jeho zvyšok po delení číslom 77 určíme jednoducho. V zadaní opísané desaťciferné čísla nebudeme sčitovať priamo. Hľadaný súčet ľahšie nájdeme tak, že zistíme, koľkokrát sa ktorá cifra nachádza vo všetkých číslach na mieste jednotiek, desiatok, stoviek, atď. Následne určíme, aký je „príspevok“ každej cifry do celkového súčtu n.

Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, potom na zvyšných deväť pozícií môžeme zvyšných deväť cifier rozmiestniť ľubovoľne, akurát na prvú pozíciu nesmieme dať cifru 0. Na prvú pozíciu teda môžeme umiestniť niektorú z ôsmich rôznych cifier (každú okrem 0), následne na druhú pozíciu niektorú z ôsmich rôznych cifier (každú okrem tej, ktorú sme dali na prvé miesto), na tretiu pozíciu niektorú zo siedmich rôznych cifier (každú okrem cifier na prvých dvoch pozíciách), atď. Cifra 1 sa preto na mieste jednotiek nachádza $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 8!$-krát.[1]

Rovnakou úvahou zistíme, že cifra 1 sa nachádza $8 \cdot 8!$-krát aj na mieste desiatok, stoviek, tisísok, atď. Len na prvej pozícii sa nachádza až $9!$-krát, pretože vtedy na zvyšných deväť pozícií môžeme zvyšných deväť cifier rozmiestniť ľubovoľne – nemáme obmedzenie pre cifru 0.

Takže príspevok cifry 1 do celkového súčtu je

$$8 \cdot 8! + 8 \cdot 8! \cdot 10 + 8 \cdot 8! \cdot 100 + \cdots + 8 \cdot 8! \cdot 10^8 + 9! \cdot 10^9 =$$
$$= 8 \cdot 8! \cdot 111\,111\,111 + 9 \cdot 8! \cdot 10^9 = 8! \cdot 9\,888\,888\,888.$$

Cifra 2 sa zrejme nachádza vo všetkých číslach na jednotlivých pozíciách rovnako veľakrát ako cifra 1, takže jej príspevok do celkového súčtu je dvojnásobný. Príspevok cifry 3 je trojnásobný, príspevok cifry 4 je štvornásobný, atď. Počet výskytov cifry 0 na jednotlivých pozíciách je síce iný ako pri ostatných cifrách, ale nemusíme ho určovať, keďže príspevok cifry 0 do súčtu je nulový. Spolu teda máme

$$n = 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888. \tag{1}$$

Hľadaný zvyšok by sme už teraz mohli určiť vyčíslením hodnoty n a následným delením číslom 77. My sa však vyhneme zdĺhavému násobeniu a deleniu veľkých čísel. Z vyjadrenia (1) vidíme, že n je deliteľné siedmimi (pretože činiteľ $8!$ je násobok siedmich). Keďže $77 = 7 \cdot 11$, zvyšok n po delení sedemdesiatimi siedmimi musí byť násobkom siedmich.

Ešte určíme zvyšok čísla n po delení jedenástimi. Triviálne platí $45 \equiv 1 \pmod{11}$ a ľahko vypočítame, že $8! = 40\,320 \equiv 5 \pmod{11}$. Určenie zvyšku čísla $9\,888\,888\,888$ môžeme urýchliť známym tvrdením: Číslo s dekadickým zápisom $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ dáva

[1] K rovnakému výsledku by sme dospeli aj inou úvahou: Ak by sme cifru 0 pripustili aj na prvej pozícii, všetkých čísel končiacich cifrou 1 by bolo $9!$. Nevyhovujúcich čísel s nulou na prvej pozícii je $8!$. Vyhovujúcich čísel je teda $9! - 8! = 9 \cdot 8! - 8! = 8 \cdot 8!$.

po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k$. Takže dostávame

$$9\,888\,888\,888 \equiv 8 - 8 + 8 - 8 + \cdots + 8 - 9 = -1 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Spolu máme

$$n = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \equiv 1 \cdot 5 \cdot 10 = 50 \equiv 6 \pmod{11}$$

(využili sme vlastnosť, že súčin činiteľov dáva rovnaký zvyšok ako súčin zvyškov činiteľov).

Zvyškom po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi je teda číslo z množiny $\{6, 17, 28, 39, 50, 61, 72\}$, ktoré je deliteľné siedmimi, teda číslo 28.

Iné riešenie. Pripusťme, že na prvom mieste môže byť aj nula. Potom medzi všetkými číslami, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, ..., 9, sa každá cifra vyskytuje na každom z desiatich miest 9!-krát. Preto je súčet všetkých takých čísel

$$s_1 = 9!(0 + 1 + 2 + \cdots + 9) \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^9) = 9! \cdot 45 \cdot \frac{10^{10} - 1}{9} = 9! \cdot 5 \cdot (10^{10} - 1).$$

Musíme ale odčítať súčet tých (navyše zarátaných) desaťciferných čísel, ktoré začínajú nulou. To sú vlastne deväťciferné čísla, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 1, 2, ..., 9. Analogicky ako v pred chvíľou odvodíme, že ich súčet je

$$s_2 = 8!(1 + 2 + \cdots + 9) \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^8) = 8! \cdot 45 \cdot \frac{10^9 - 1}{9} = 8! \cdot 5 \cdot (10^9 - 1).$$

Zrejme $7 \mid s_1$ a $7 \mid s_2$, takže aj $7 \mid s_1 - s_2 = n$. Ďalej s využitím známeho rozkladu $(10^{2k+1} + 1) = (10 + 1)(10^{2k} - 10^{2k-1} + \cdots + 1)$ máme

$$\begin{aligned} s_1 &= 9! \cdot 5(10^5 - 1)(10^5 + 1) \equiv 9! \cdot 5(10^5 - 1) \cdot 0 \equiv 0 && \pmod{11},\\ s_2 &= 8! \cdot 5 \cdot (10^9 - 1) = (8 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (10^9 + 1 - 2) \equiv \\ &\equiv 1 \cdot (-1) \cdot 30 \cdot (-2) \equiv 5 && \pmod{11}, \end{aligned}$$

čiže $n = s_1 - s_2 \equiv 6 \pmod{11}$. Záver je rovnaký ako pri prvom riešení.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte počet všetkých desaťciferných čísel, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, ..., 9. [10! − 9!]

N2. Učiteľ si myslí číslo. Žiakom prezradil, že jeho číslo končí cifrou 6 a dáva po delení trinástimi zvyšok 9. Určte, aký zvyšok dáva učiteľovo číslo po delení číslom 65. [Učiteľovo číslo n spĺňa $n \equiv 1 \pmod 5$, $n \equiv 9 \pmod{13}$. Keďže $65 = 5 \cdot 13$, hľadaný zvyšok musí byť z množiny $\{9, 9 + 13, 9 + 26, 9 + 39, 9 + 52\}$. Z týchto čísel jedine $9 + 52 = 61$ dáva správny zvyšok po delení piatimi.]

N3. Dokážte, že číslo s dekadickým zápisom $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ dáva po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k$. [Ak i je párne, tak $10^i = (10^i - 1) + 1 = 9\ldots9 + 1 = 99 \cdot 10\ldots101 + 1 \equiv 1 \pmod{11}$. Ak i je nepárne, tak $10^i = 10 \cdot 10^{i-1} \equiv 10 \cdot 1 \equiv -1 \pmod{11}$.]

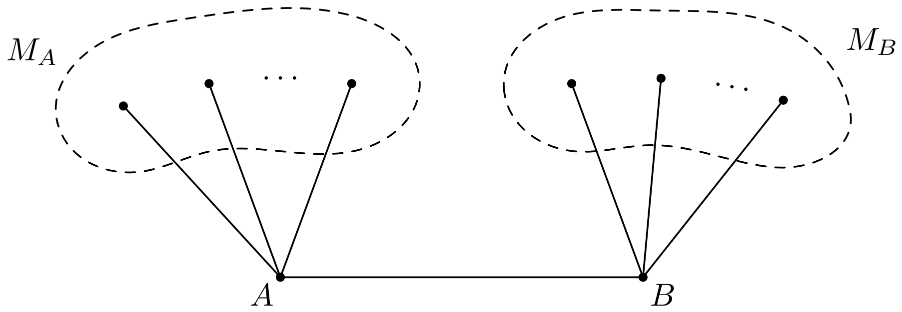
D1. Dokážte, že ak čísla a, b dávajú po delení číslom d postupne zvyšky u, v, tak zvyšky čísel ab, uv po delení d sú rovnaké.

D2. Dokážte, že zvyšky čísel $1, 10, 10^2, 10^3, \ldots$ po delení ľubovoľným nepárnym prvočíslom rôznym od 5 tvoria periodickú postupnosť.

2. *Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve dvoch spoločných známych. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že A aj B mali medzi prítomnými rovnaký počet známych. Ukážte tiež, že na stretnutí mohlo byť práve šesť osôb.*

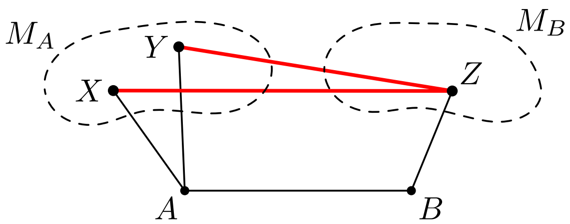
(*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Účastníkov stretnutia budeme znázorňovať plnými krúžkami a to, že sa dvaja ľudia poznajú, budeme znázorňovať spojením príslušných krúžkov čiarou[2]. Zadanú situáciu zakreslíme na obr. 1.

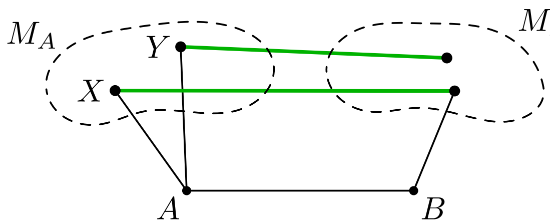


Obr. 1

Množinu známych účastníka A rôznych od B označme M_A a množinu známych účastníka B rôznych od A označme M_B. Ani jeden človek z M_A sa nepozná s B, lebo A a B nemajú spoločného známeho. Takže každý z M_A má s B práve dvoch spoločných známych: jeden z nich je A, druhý sa nachádza medzi zvyšnými známymi účastníka B, teda v M_B. Pritom žiadni dvaja ľudia X, Y z M_A nemôžu poznať toho istého človeka Z v M_B. V opačnom prípade by sa totiž Z nepoznal s A (lebo A, B nemajú spoločných známych) a zároveň by X, Y, B tvorili trojicu ich spoločných známych (obr. 2a), čo je v rozpore so zadaním.



Obr. 2a



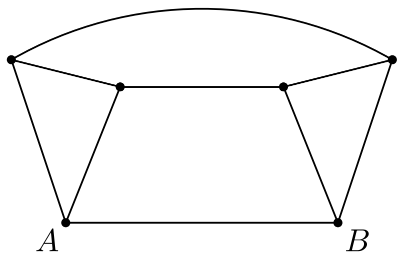
Obr. 2b

Zhrňme ešte raz poznatky odvodené v predošlom odseku: Každý človek z M_A pozná niekoho z M_B a žiadni dvaja ľudia z M_A nepoznajú toho istého v M_B (obr. 2b). Z toho vyplýva, že v množine M_B je aspoň toľko ľudí ako v množine M_A, t. j. $|M_B| \geqq |M_A|$. Tou istou úvahou (po zámene úloh A a B) vieme samozrejme dokázať, že $|M_A| \geqq |M_B|$. Nutne teda $|M_A| = |M_B|$, čiže A a B majú medzi prítomnými rovnaký počet známych.

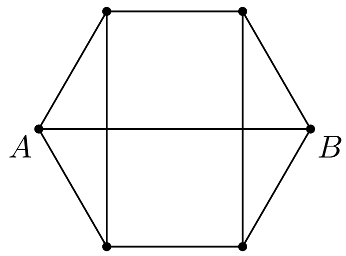
V druhej časti riešenia už len vymyslíme a znázorníme nejaké vyhovujúce rozloženie známostí medzi šesticou osôb, z ktorých dve osoby sú A a B, poznajú sa a nemajú

[2] Takému znázorneniu sa hovorí *graf*; účastníci sú *vrcholy* a známosti sú *hrany* grafu

spoločných známych. Z prvej časti už vieme, že tieto osoby musia mať rovnaký počet známych. Stačí teda napríklad nakresliť spojené osoby A, B, každú z nich spojiť s dvoma ďalšími osobami a medzi štvoricou osôb dokresliť čiary tak, aby bolo splnené zadanie. Ľahko objavíme vyhovujúce rozloženie ako na obr. 3a (ktoré možno prekresliť napr. do tvaru na obr. 3b).



Obr. 3a



Obr. 3b

Iné riešenie. Nech M_A, M_B sú tie isté množiny ako v prvom riešení. Budeme používať pojmy z teórie grafov. Nech M_A obsahuje m vrcholov a M_B obsahuje n vrcholov. Keďže každý vrchol z M_A má s B spoločného známeho A a zároveň nie je známym vrcholu B, musí mať s B práve jedného známeho v M_B (aby bola splnená podmienka zo zadania, že majú práve dvoch spoločných známych). Takže z každého vrcholu v M_A vychádza práve jedna hrana do M_B. Spolu preto vychádza z M_A do M_B práve m hrán. Analogicky z M_B vychádza do M_A práve n hrán. Sú to však tie isté hrany, takže nutne $m = n$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve *jedného* spoločného známeho. Nikto sa nepoznal s každým. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že na stretnutí bola osoba, ktorá nepoznala A ani B. [Ak by A nemal okrem B žiadneho známeho, musel by každý poznať B, čo nevyhovuje zadaniu. Takže A má okrem B aspoň jedného známeho X. Podobne B má okrem A známeho Y. Pritom X a Y sa nemôžu poznať, preto musia mať spoločného známeho Z, ktorý nepozná A ani B.]

D1. Dokážte, že rozloženie na obr. 3a je jediné vyhovujúce rozloženie so šiestimi osobami.

D2. Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve *troch* spoločných známych. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že A aj B mali medzi prítomnými rovnaký počet známych. [Pri podobných úvahách ako v druhom riešení (z každého vrcholu z M_A vychádzajú práve dve hrany do M_B) dostaneme $2m = 2n$, čiže $m = n$.]

D3. V skupine n žiakov sa spolu niektorí kamarátia. Vieme, že každý má medzi ostatnými aspoň štyroch kamarátov. Učiteľka chce žiakov rozdeliť na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny tak, že každý bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta. a) Ukážte, že v prípade $n = 7$ sa dajú žiaci požadovaným spôsobom vždy rozdeliť. b) Zistite, či možno žiakov takto vždy rozdeliť aj v prípade $n = 8$. [60–C–I–4]

---

3. *Označme S stred kružnice vpísanej, T ťažisko a V priesečník výšok daného rovnoramenného trojuholníka, ktorý nie je rovnostranný.*

a) Dokážte, že bod S je vnútorným bodom úsečky TV.

b) Určte pomer dĺžok strán daného trojuholníka, ak je bod S stredom úsečky TV.

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Označme vrcholy daného trojuholníka písmenami A, B, C tak, aby BC bola základňa. Veľkosti strán a uhlov trojuholníka budeme označovať štandardným spôsobom, t. j. $|BC| = a$, $|AC| = |AB| = b$, $\beta = \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Nech H je stred základne BC.

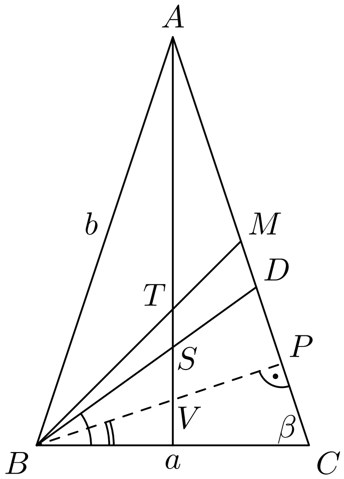
a) Veďme vrcholom B výšku, os uhla a ťažnicu trojuholníka ABC a ich priesečníky s priamkou CA označme postupne P, D a M. Všetky tri ležia na polpriamke CA (body D, M dokonca na úsečke CA). Zrejme stačí dokázať, že bod D je vnútorným bodom úsečky MP. Rozoberieme dva prípady.

Ak $b > a$ (obr. 4a), tak zrejme $\beta > 60^\circ$. Odtiaľ máme

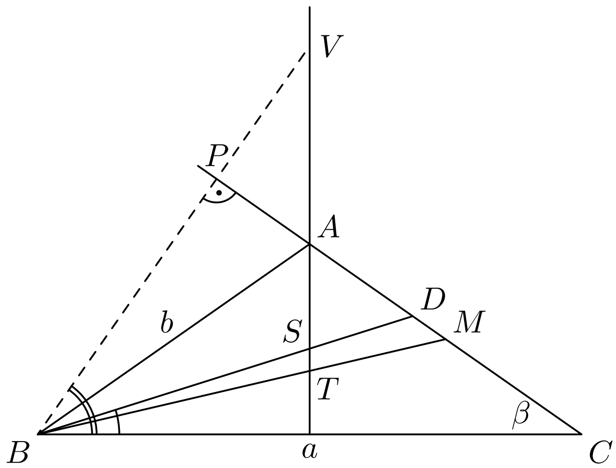
$$|\measuredangle CBP| = 90^\circ - \beta < 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ < \tfrac{1}{2}\beta = |\measuredangle CBD|,$$

takže $|CP| < |CD|$. Os uhla delí stranu trojuholníka v pomere priľahlých strán, preto $|CD|/|AD| = a/b < 1$, odkiaľ $|CD| < \frac{1}{2}|CA| = |CM|$. Spolu teda $|CP| < |CD| < |CM|$, čiže D leží vnútri úsečky MP.

Ak $a > b$ (obr. 4b), tak $\beta < 60^\circ$ a analogicky dostávame $|\measuredangle CBP| = 90^\circ - \beta > 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ > \frac{1}{2}\beta = |\measuredangle CBD|$, $|CD|/|AD| = a/b > 1$, takže $|CP| > |CD| > \frac{1}{2}|CA| = |CM|$, čiže aj v tomto prípade D leží vnútri úsečky MP.



Obr. 4a



Obr. 4b

b) Najskôr vyjadríme dĺžky úsečiek TH, SH, VH pomocou dĺžok strán trojuholníka a pomocou dĺžky $|AH|$, ktorú označme v (obr. 5). Z Pytagorovej vety v trojuholníku ABH máme $v^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$, takže neskôr budeme vedieť za v dosadiť vyjadrenie len pomocou dĺžok a, b.

Ťažisko T delí ťažnicu AH v pomere $2 : 1$, takže $|TH| = \frac{1}{3}v$.

Úsečka SH je polomerom vpísanej kružnice, takže jej dĺžku vypočítame zo známeho vzorca $S_{ABC} = \varrho \cdot s$ pre obsah trojuholníka ABC, pričom s označuje polovicu obvodu. Dostávame

$$|SH| = \varrho = \frac{S_{ABC}}{s} = \frac{\frac{1}{2}av}{\frac{1}{2}(a+2b)} = \frac{av}{a+2b}.$$

Trojuholníky BVH a ABH sú podobné, pretože sú oba pravouhlé a $|\measuredangle VBH| = 90^\circ - \beta = \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle BAH|$. Pre prislúchajúce dĺžky strán preto máme $|VH| : |BH| = |BH| : |AH|$, odkiaľ

$$|VH| = \frac{|BH|^2}{|AH|} = \frac{a^2}{4v}.$$

Ak je S stredom úsečky TV, platí $|TS| = |SV|$. Pritom

$$|TS| = \big||TH| - |SH|\big|, \qquad |SV| = \big||SH| - |VH|\big| \tag{1}$$

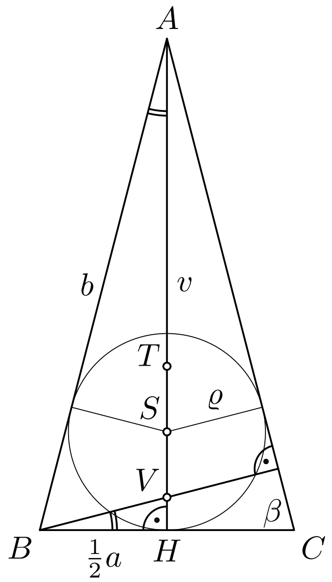
a z časti a) vieme, že rozdiely v absolútnych hodnotách v (1) sú buď oba kladné, alebo oba záporné. Rovnosť $|TS| = |SV|$ je teda ekvivalentná s rovnosťou

$$|TH| - |SH| = |SH| - |VH|, \qquad \text{čiže} \qquad |TH| + |VH| = 2|SH|.$$

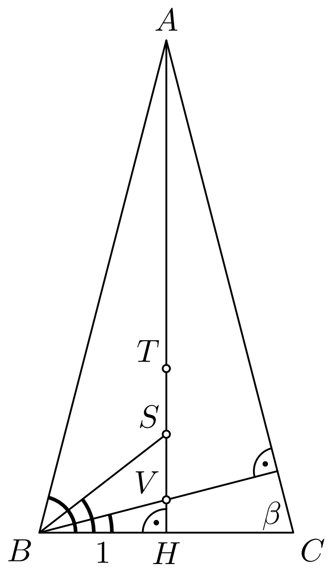
Dosadením odvodených dĺžok po ekvivalentných úpravách dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}v + \frac{a^2}{4v} &= \frac{2av}{a+2b},\\
4v^2(a+2b) + 3a^2(a+2b) &= 24av^2,\\
3a^2(a+2b) &= 4v^2(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= 4(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= (2b+a)(2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= (2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= 12ab - 5a^2 - 4b^2,\\
2a^2 - 3ab + b^2 &= 0,\\
(2a-b)(a-b) &= 0.
\end{aligned}$$

Keďže podľa zadania je $a \neq b$, bod S je stredom úsečky TV práve vtedy, keď $2a = b$, teda keď pomer dĺžok strán trojuholníka je $1:2:2$.



Obr. 5



Obr. 6

Iné riešenie. a) Keďže S, T, V sú vnútorné body polpriamky HA (body S, T sú dokonca vnútorné body úsečky HA), stačí ukázať, že oba rozdiely $|HS| - |HT|$ a $|HV| - |HS|$ sú nenulové a majú rovnaké znamienko.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $a = 2$, t. j. $|BH| = |HC| = 1$. Z pravouhlých trojuholníkov BSH, BAH a BVH dostávame (obr. 6)

$$|HS| = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad |HT| = \frac{|HA|}{3} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{3} \quad \text{a} \quad |HV| = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Vďaka vzťahu $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ pri označení $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ máme

$$|HS| - |HT| = t - \frac{2t}{3(1-t^2)} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)},$$

$$|HV| - |HS| = \frac{1-t^2}{2t} - t = \frac{1-3t^2}{2t}.$$

Keďže β je ostrý uhol rôzny od 60°, platí $\frac{1}{2}\beta \in (0^\circ, 45^\circ)$ a $\frac{1}{2}\beta \neq 30^\circ$, odkiaľ pre hodnotu $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ vyplývajú vzťahy $0 < t < 1$ a $3t^2 \neq 1$, takže oba skúmané rozdiely sú buď kladné (ak $\beta < 60^\circ$), alebo záporné (ak $\beta > 60^\circ$).

b) Podiel rozdielov z časti a) má vyjadrenie

$$\frac{|HS| - |HT|}{|HV| - |HS|} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)} \cdot \frac{2t}{1-3t^2} = \frac{2t^2}{3(1-t^2)}.$$

V obore $(0, 1)$ riešime rovnicu

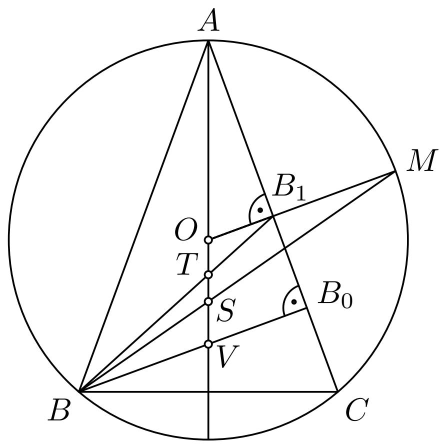
$$\frac{2t^2}{3(1-t^2)} = 1,$$

ktorá tam má zrejme jediný koreň

$$t = \sqrt{\tfrac{3}{5}}, \quad \text{odkiaľ} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2t}{1-t^2} = \sqrt{15}.$$

Teda v trojuholníku BHA okrem $|BH| = 1$ platí $|HA| = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$, takže podľa Pytagorovej vety máme $|BA| = \sqrt{1+15} = 4$. Strany trojuholníka ABC sú teda v pomere $2 : 4 : 4$, čiže $1 : 2 : 2$.

Iné riešenie. a) Označme vrcholy daného trojuholníka rovnako ako v prvom riešení, ďalej O stred opísanej kružnice, B_0 pätu výšky z vrcholu B a B_1 stred strany AC. Keďže os uhla pri vrchole B pretína oblúk CA opísanej kružnice v jeho strede M (obr. 7), je zrejmé, že vďaka podmienke $O \neq V$ (ktorá je ekvivalentná s tým, že daný trojuholník nie je rovnostranný) pretne táto os stranu AC vnútri úsečky B_0B_1, a teda bod S leží vnútri úsečky TV.



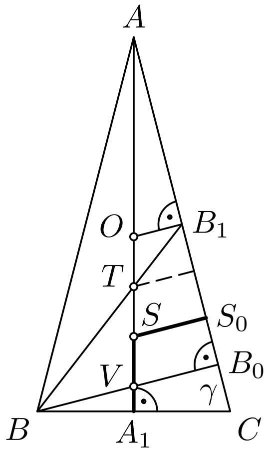
Obr. 7

b) Využijeme známu vlastnosť troch základných bodov trojuholníka: ťažiska T, stredu O opísanej kružnice a priesečníka V výšok. Uvedené tri body ležia totiž na priamke v ľubovoľnom trojuholníku, pričom ťažisko T vždy delí úsečku OV v pomere $1:2$.[3] Ak teda stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC rozpoľuje úsečku TV, delia body T a S (v tomto poradí) orientovanú úsečku OV na tri zhodné časti.

Pre kolmé priemety B_1, S_0 a B_0 bodov O, S a V na stranu AC (obr. 8) preto platí

$$CB_1 = CB_0 + 3(CS_0 - CB_0) = 3CS_0 - 2CB_0.$$

Ak uvedenú rovnosť chápeme ako rovnosť orientovaných úsečiek (alebo vektorov) na priamke CA, vyhneme sa nutnosti rozlišovať, či je uhol pri vrchole A väčší alebo menší ako $60°$, pretože ako už vieme, na poradie spomenutých bodov to nemá vplyv.



Obr. 8

Do odvodenej rovnosti teraz môžeme dosadiť $\frac{1}{2}b$ za CB_1, $\frac{1}{2}a$ za CS_0 ($|CS_0| = |CA_1|$ je dĺžka úsekov oboch dotyčníc z vrcholu C ku kružnici vpísanej trojuholníku ABC) a napokon z dvoch podobných pravouhlých trojuholníkov BCB_0 a ACA_1 (zhodujú sa v spoločnom uhle BCA) vychádza $CB_0 = \frac{1}{2}a^2/b$. Dostávame tak

$$\frac{b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{b}, \quad \text{čiže} \quad b^2 - 3ab + 2a^2 = 0.$$

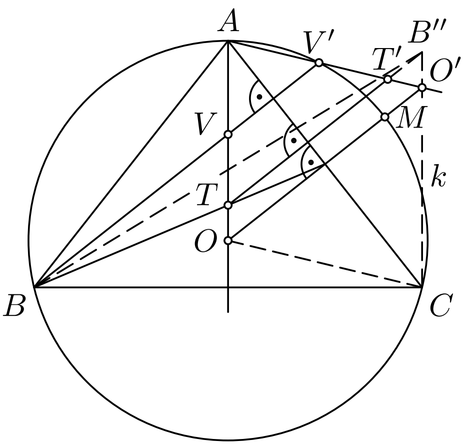
Poslednú rovnosť možno prepísať ako $(b-a)(b-2a) = 0$, a keďže $a \neq b$, musí byť $b = 2a$.

Iné riešenie. Časť a) už nebudeme znovu dokazovať, použijeme rovnaký postup aj označenie ako v predošlom riešení.

b) Najskôr ukážeme, že v trojuholníku, v ktorom je pri vrchole A uhol väčší ako $60°$, nemôže os uhla stredom úsečky VT vôbec prechádzať. Na to využijeme známu vlastnosť priesečníka výšok: jeho obraz V' v osovej súmernosti podľa strany AC leží na kružnici k

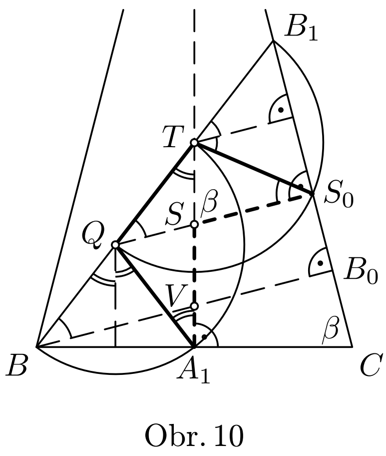
[3] Uvedená vlastnosť jednoducho vyplýva z toho, že trojuholník $A_1B_1C_1$ tvorený strednými priečkami daného trojuholníka ABC je jeho obrazom v rovnoľahlosti so stredom v ťažisku a koeficientom $-\frac{1}{2}$. A keďže os každej zo strán trojuholníka ABC je zároveň výškou trojuholníka $A_1B_1C_1$, je stred O kružnice opísanej danému trojuholníku ABC zároveň priesečníkom výšok trojuholníka $A_1B_1C_1$, takže bod O je v uvedenej rovnoľahlosti obrazom bodu V a $|TO| = \frac{1}{2}|TV|$.

trojuholníku ABC opísanej (obr. 9). Keďže za uvedeného predpokladu ležia body T a O (v tomto poradí) na polpriamke AO až za bodom V, ležia zrejme obrazy T', O' bodov T, O v uvedenej osovej súmernosti vo vonkajšej oblasti kružnice k. V jej vonkajšej oblasti leží však aj obraz B'' vrcholu B v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky VT: bod B'' je totiž priesečníkom polpriamok TT' a CO', pretože CO' je zároveň kolmá na BC ($AOCO'$ je kosoštvorec) a je tak obrazom priamky AO v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom 2. Uhlopriečka BB'' rovnobežníka $BTB''V$ (na ktorej leží ťažnica trojuholníka BTV) preto určite pretne kružnicu k vnútri pásu rovnobežiek BV a TT'. Os uhla pri vrchole B však pretína kružnicu k v strede M príslušného oblúka AC a priamka OM leží mimo spomenutého pásu.



Obr. 9

Predpokladajme teda, že v danom trojuholníku je pri vrchole A uhol menší ako $60°$ a že stred S vpísanej kružnice rozpoľuje úsečku VT. Označme Q stred úsečky BT, S_0 bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AC. Teda $|SA_1| = |SS_0|$. Bod S_0 leží zrejme na Tálesovej kružnici s priemerom QB_1 a zároveň bod A_1 leží na Tálesovej kružnici s priemerom BT (obr. 10), takže $|S_0T| = |TQ| = |QA_1|$. Trojuholníky STS_0 a SQA_1 sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti jednej z nich. Oba trojuholníky preto majú zhodné opísané kružnice a pre ich uhly pri vrcholoch T, resp. Q oproti zhodným tetivám SS_0 a SA_1 zodpovedajúcich kružníc platí, že sú buď zhodné, alebo doplnkové (t. j. ich súčet dáva $180°$).



Obr. 10

Ak sú oba uhly zhodné, ležia body A_1, S_0, T, Q na kružnici, a keďže $|QA_1| = |TS_0|$, je A_1S_0TQ lichobežník alebo pravouholník, takže úsečka A_1S_0 je rovnobežná s QT, a je teda strednou priečkou trojuholníka BCB_1. Trojuholník A_1S_0C je rovnoramenný, preto je rovnoramenný aj trojuholník BB_1C. Odtiaľ ihneď vyplýva, že $b = 2a$.

Ukážeme teraz, že vďaka predpokladu $\alpha < 60°$ nemôže druhá možnosť nastať, teda že súčet oboch uhlov STS_0 a SQA_1 je menší ako $180°$. Na obr. 10 sú vyznačené jednoduchým oblúčikom uhly, ktoré sa zhodujú s uhlom SQT (všade sa jedná o súhlasné uhly alebo o uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka). Podobne dva oblúčiky vyznačujú uhly zhodné s uhlom STQ. Z trojuholníka STQ navyše vyplýva, že $|\angle SQT| + |\angle STQ| = \beta > 60°$. Z kombinácie uhlov pri bodoch Q, T priamky BB_1 vidíme, že na vyšetrovaný súčet uhlov STS_0 a SQA_1 ostáva len $2 \cdot 180° - 3\beta < 180°$. Tým je požadovaná vlastnosť dokázaná.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že v každom trojuholníku delí os uhla protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých. [Ak D je priesečník strany CA a osi uhla CBA, tak pomer q obsahov trojuholníkov BCD a BAD možno vyjadriť dvoma spôsobmi: $q = |BC| : |BA|$ (lebo výšky spustené z D majú rovnakú veľkosť) a zároveň $q = |CD| : |AD|$.]

N2. V rovnoramennom trojuholníku so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b vyjadrite veľkosť polomeru vpísanej kružnice. [$\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 - a^2}/(a + 2b)$]

N3. Dokážte platnosť súčtového vzorca $\operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$.

D1. Na odvesnách dĺžok a, b pravouhlého trojuholníka ležia postupne stredy dvoch kružníc k_a, k_b. Obe kružnice sa dotýkajú prepony a prechádzajú vrcholom oproti prepone. Polomery uvedených kružníc označme ϱ_a, ϱ_b. Určte najväčšie kladné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

platí pre všetky pravouhlé trojuholníky. [58–A–II–2]

---

4. *Nech p, q sú dve rôzne prvočísla, m, n prirodzené čísla a súčet*

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$$

je celé číslo. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Aby sa dala jednoduchšie využiť podmienka celočíselnosti, súčet z prvej vety zadania prepíšeme na jeden zlomok do tvaru

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p} = \frac{p(mp-1) + q(nq-1)}{pq}.$$

Čitateľ posledného zlomku je násobkom jeho menovateľa, takže je deliteľný ako prvočíslom p, tak aj prvočíslom q. Keďže prvý sčítanec čitateľa je násobkom p, musí ním byť aj druhý sčítanec, teda $p \mid q(nq-1)$. Z nesúdeliteľnosti prvočísel p, q odtiaľ dostávame $p \mid nq - 1$. Podobne máme $q \mid p(mp-1)$, čiže $q \mid mp - 1$.

Prirodzené číslo $mp + (nq - 1)$ (ktoré možno zapísať aj v tvare $(mp - 1) + nq$) je preto deliteľné ako číslom p, tak aj číslom q, a teda aj (vďaka nesúdeliteľnosti p, q) súčinom pq. Pre jeho veľkosť potom platí odhad

$$mp + nq - 1 \geqq pq, \quad \text{odkiaľ} \quad mp + nq > pq.$$

Po vydelení oboch strán číslom pq dostaneme nerovnosť, ktorú sme mali dokázať.

Poznámka. Kľúčové tvrdenie $pq \mid mp + nq - 1$ možno dokázať aj inak. Keďže $p \mid nq - 1$ a $q \mid mp - 1$, nutne $pq \mid (nq - 1)(mp - 1) = mnpq + 1 - mp - nq$. Odtiaľ $pq \mid 1 - mp - nq$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nájdite niekoľko štvoríc m, n, p, q vyhovujúcich predpokladom zadania. [Vyhovuje ľubovoľná štvorica, pre ktorú sú oba zlomky $(mp - 1)/q$, $(nq - 1)/p$ celé čísla.]

N2. Nech a, b, c sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak sú a, b nesúdeliteľné a $a \mid bc$, tak $a \mid c$. [Keďže $(a, b) = 1$, existujú celé čísla x, y také, že $ax + by = 1$. Keďže $a \mid bc$, existuje k také, že $ak = bc$. Odtiaľ $aky = bcy = c(1 - ax)$, čiže $c = a(ky + cx)$, teda $a \mid c$.]

N3. Pre celé čísla a, b, c, d platí $b \mid a + c$, $a \mid b + d$. Dokážte, že $ab \mid ad + bc + cd$. [$ab \mid (a + + c)(b + d) = ab + (ad + bc + cd)$]

D1. Určte všetky celé kladné čísla m, n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$. [59–A–II–3]

D2. Určte všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn + 1)$ deliteľné číslom $(m + n)^2$. [60–A–II–3]

D3. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledujúce podmienky:

$$p \mid q + r,$$
$$q \mid r + 2p,$$
$$r \mid p + 3q.$$

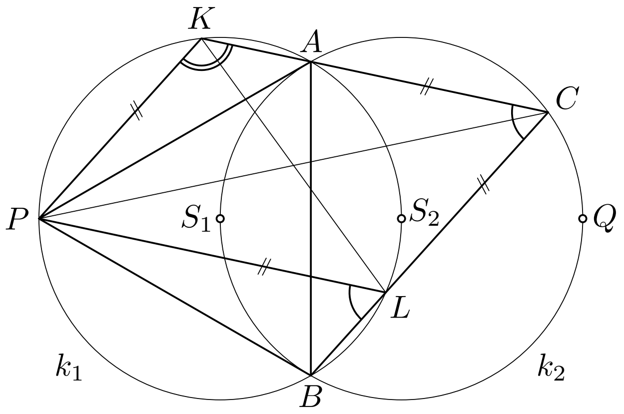
[55–A–III–5]

---

5. *Dané sú dve zhodné kružnice k_1, k_2 s polomerom rovným vzdialenosti ich stredov. Ich priesečníky označme A a B. Na kružnici k_2 zvoľme bod C tak, že úsečka BC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od B, ktorý označíme L. Priamka AC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od A, ktorý označíme K. Dokážte, že priamka, na ktorej leží ťažnica z vrcholu C trojuholníka KLC, prechádza pevným bodom nezávislým od polohy bodu C.*
(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme S_1, S_2 stredy kružníc k_1, k_2. Nech P je taký bod kružnice k_1, že PS_2 je jej priemerom. Ukážeme, že hľadaným pevným bodom je P, t. j. dokážeme, že stred úsečky KL leží s bodmi P, C na jednej priamke.

Aby úsečka BC preťala kružnicu k_1, musí bod C ležať vnútri kratšieho oblúka AQ kružnice k_2, pričom S_1Q je priemerom k_2. Bod L je potom vnútorným bodom kratšieho oblúka AB a bod K vnútorným bodom kratšieho oblúka PA kružnice k_1 (obr. 11).



Obr. 11

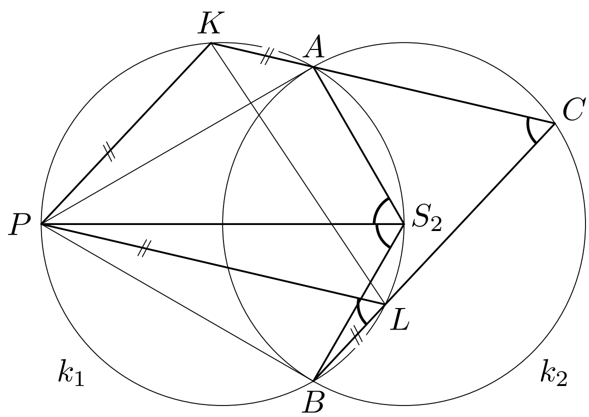
Keďže kružnice majú rovnaké polomery, sú trojuholníky S_1S_2A, S_1S_2B rovnostranné a veľkosť stredového uhla BS_1A je 120°. Príslušný obvodový uhol BPA má preto veľkosť 60°. Navyše body A, B sú súmerne združené podľa priamky PS_2, takže $|PA| = |PB|$ a trojuholník ABP je rovnostranný[4]. Všetky obvodové uhly nad zhodnými tetivami PA, PB, AB majú teda veľkosť 60° (ak vrchol leží na dlhšom oblúku), resp. 120° (ak vrchol leží na kratšom oblúku). Pri tetive AB to platí aj pre obvodové uhly na kružnici k_2, keďže obe kružnice sú zhodné.

Z uvedeného dostávame

$$|\measuredangle ACB| = 60^\circ, \qquad |\measuredangle PLB| = 60^\circ, \qquad |\measuredangle PKA| = 120^\circ.$$

Z rovnosti prvých dvoch uhlov vyplýva rovnobežnosť priamok PL a KC a z toho, že súčet prvého a tretieho uhla je 180°, vyplýva rovnobežnosť priamok PK a LC. Štvoruholník $PLCK$ je teda rovnobežník, z čoho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie (uhlopriečky rovnobežníka sa rozpoľujú, takže priamka PC prechádza stredom úsečky KL).

Iné riešenie. Označme body rovnako ako v prvom riešení. Odlišným spôsobom dokážeme, že $PLCK$ je rovnobežník.



Obr. 12

[4] To ihneď vyplýva aj z toho, že P, B, S_2, A sú štyri zo šiestich vrcholov pravidelného šesťuholníka vpísaného do k_1.

Body A, B sú súmerne združené podľa priamky PS_2, preto s využitím vlastností obvodových a stredových uhlov dostávame

$$|\measuredangle PLB| = |\measuredangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\measuredangle AS_2B| = |\measuredangle ACB|,$$

odkiaľ vyplýva $PL \parallel KC$. Štvoruholník $PLAK$ je teda lichobežník, a keďže je tetivový (má opísanú kružnicu k_1), musí byť rovnoramenný. Jeho uhlopriečky KL, PA sú teda zhodné, a keďže z vyššie spomenutej súmernosti máme $|PA| = |PB|$, platí tiež $|KL| = |PB|$. Štvoruholník $KPBL$ je tetivový a jeho protiľahlé strany KL, PB sú zhodné, takže to tiež musí byť rovnoramenný lichobežník[5] (obr. 12). Z toho už dostávame $PK \parallel LC$.

Poznámka. Zadané tvrdenie platí, aj keď pripustíme, že kružnice k_1, k_2 majú rôzne polomery, pričom S_2 leží na k_1; v druhom uvedenom riešení sme nikde nevyužili zhodnosť kružníc. V takom prípade však bod K môže ležať aj mimo kratšieho oblúka PA, takže treba osobitne rozlíšiť dva prípady.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že každý tetivový lichobežník je rovnoramenný. [Ak $PQRS$ je tetivový lichobežník so základňou PQ, tak zo striedavých uhlov máme $|\measuredangle QPR| = |\measuredangle SRP|$. Teda obvodové uhly nad tetivami QR, PS majú rovnakú veľkosť a tetivy QR, PS musia byť zhodné. Iný spôsob: Os každej tetivy prechádza stredom kružnice, preto os strany PQ je totožná s osou strany RS (sú rovnobežné a prechádzajú spoločným bodom) a podľa tejto osi sú úsečky PS, QR súmerne združené, čiže zhodné.]

N2. Dokážte, že v štvoruholníku sa obe uhlopriečky rozpoľujú práve vtedy, keď je to rovnobežník. [Ak sa v štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečky rozpoľujú v bode S, tak trojuholníky ABS, CDS sú zhodné a zo striedavých uhlov $AB \parallel CD$, analogicky $BC \parallel AD$. Ak $ABCD$ je rovnobežník s priesečníkom uhlopriečok S, tak zo striedavých uhlov vyplýva zhodnosť trojuholníkov ABS, CDS, t. j. zhodnosť úsečiek BS, SD, resp. AS, SC.]

D1. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD. [58–A–I–2]

D2. Je daná kružnica k s tetivou AC, ktorá nie je priemerom. Na jej dotyčnici vedenej bodom A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D priesečník kružnice k s vnútrom úsečky XC (ak existuje). Trojuholník ACD doplníme na lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice k. Určte množinu priesečníkov priamok BC a AD prislúchajúcich všetkým takým lichobežníkom. [59–A–III–4]

---

6. *Nájdite najväčšie reálne číslo k také, že nerovnosť*

$$\frac{2(a^2 + kab + b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqq \sqrt{ab}$$

platí pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b. (Ján Mazák)

Riešenie. Pre $k = 2$ sa dá nerovnosť po vykrátení upraviť na tvar $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$, čo je známa nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platná pre ľubovoľné kladné a, b. Hľadané najväčšie k je teda určite aspoň 2. Skúmajme ďalej danú nerovnosť len za predpokladu $k \geqq 2$.

[5] Vyplýva to napríklad z rovnosti obvodových uhlov PLB, KPL nad zhodnými tetivami PB, KL, alebo jednoducho zo súmernosti podľa osi úsečky BL.

Ekvivalentnou úpravou (keďže $k+2>0$) dostaneme

$$2(a^2+kab+b^2) \geqq (k+2)(a+b)\sqrt{ab}$$

a po vydelení oboch strán členom b^2 máme

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+k\frac{a}{b}+1\right) \geqq (k+2)\left(\frac{a}{b}+1\right)\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Označme $\sqrt{a/b}=x$. Zrejme x môže nadobudnúť ľubovoľnú kladnú hodnotu. Ďalej sa preto stačí zaoberať nerovnosťou

$$2(x^4+kx^2+1) \geqq (k+2)(x^2+1)x$$

a hľadať najväčšie k také, že je splnená pre každé kladné x. Po jednoduchých úpravách smerujúcich k osamostatneniu k dostávame

$$\begin{aligned}
k\bigl((x^2+1)x-2x^2\bigr) &\leqq 2\bigl(x^4+1-(x^2+1)x\bigr),\\
k(x^3-2x^2+x) &\leqq 2(x^4-x^3-x+1),\\
kx(x^2-2x+1) &\leqq 2\bigl(x^3(x-1)-(x-1)\bigr),\\
kx(x-1)^2 &\leqq 2(x-1)^2(x^2+x+1).
\end{aligned}$$

pre $x=1$ je posledná nerovnosť splnená vždy. Pre $x\neq 1$ nerovnosť vydelíme kladným výrazom $x(x-1)^2$ a získame priamo ohraničenie pre k:

$$k \leqq \frac{2(x^2+x+1)}{x} = 2+2\left(x+\frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

Pre kladné x je $x+1/x \geqq 2$, pričom rovnosť platí jedine pre $x=1$. Pre $x\neq 1$ výraz $x+1/x$ nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(2,\infty)$. Teda pravá strana v (1) nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(6,\infty)$. Z toho je jasné, že najväčšie k také, že (1) platí pre všetky kladné $x\neq 1$, je $k=6$.

Iné riešenie. Zadanú nerovnosť ekvivalentne upravíme:

$$\frac{2}{k+2}\cdot\frac{(a+b)^2+(k-2)ab}{a+b} \geqq \sqrt{ab},$$

$$\frac{2}{k+2}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+(k-2)\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \geqq 1. \tag{2}$$

Označme $x=(a+b)/\sqrt{ab}$. Potom $x\geqq 2$, pretože $\frac{1}{2}(a+b)\geqq\sqrt{ab}$. Úpravou (2) za podmienky $k+2>0$ získame

$$\frac{2}{k+2}\left(x+(k-2)\frac{1}{x}\right) \geqq 1,$$

$$x^2-\frac{k+2}{2}x+(k-2) \geqq 0. \tag{3}$$

Kvadratická funkcia na ľavej strane poslednej nerovnosti má pre každé k koreň $x=2$ a jej koeficient pri kvadratickom člene je kladný. Takže (3) platí pre každé $x\geqq 2$ práve vtedy, keď je vrchol paraboly tejto funkcie na číselnej osi naľavo od bodu 2, teda práve vtedy, keď

$$\frac{k+2}{4} \leqq 2, \qquad \text{čiže} \quad k \leqq 6.$$

Záver. Hľadaná najväčšia hodnota je $k=6$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte, aké hodnoty nadobúda výraz $x + 1/x$ pre $x > 0$. [Keďže $(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^2 \geqq 0$, máme $x + 1/x \geqq 2$. Rovnosť nastáva pre $x = 1$. Výraz nadobudne aj všetky hodnoty väčšie ako 2, pretože rovnica $x + 1/x = p$ má pre $p > 2$ dva kladné korene $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4}$.]

N2. Určte všetky hodnoty parametra p, pre ktoré nadobúda kvadratická funkcia $f(x) = x^2 + px + p - 1$ na obore kladných čísel len kladné hodnoty. [Keďže $f(x) = (x + 1)(x + p - 1)$, koreňmi funkcie sú -1 a $1 - p$. Zadaná podmienka je splnená práve vtedy, keď ani jeden z koreňov nie je kladný, teda keď $p \geqq 1$.]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \leqq \frac{a + b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. [59–C–I–5]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. Pavel Novotný, 2. Vojtech Bálint, 3. Jaromír Šimša, 4. Jaromír Šimša, 5. Tomáš Jurík, 6. Ján Mazák

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Karel Horák

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$y + 3x = 4x^3,$$
$$x + 3y = 4y^3.$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Sčítaním, resp. odčítaním oboch rovníc a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}4(x+y) &= 4(x^3+y^3),\\ (x+y) &= (x+y)(x^2-xy+y^2),\end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned}2(x-y) &= 4(x^3-y^3),\\ \frac{1}{2}(x-y) &= (x-y)(x^2+xy+y^2).\end{aligned} \tag{1}$$

Ak $x + y = 0$, tak dosadením $y = -x$ napríklad do prvej rovnice pôvodnej sústavy dostaneme $2x = 4x^3$, teda po úprave $x(2x^2 - 1) = 0$. Riešením tejto rovnice sú zrejme hodnoty $x = 0$ a $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, máme tak prvé tri riešenia sústavy: usporiadané dvojice $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ a $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Ak $x - y = 0$, tak dosadením $y = x$ do prvej rovnice dostaneme $4x = 4x^3$, čiže $x(x^2 - 1) = 0$. Riešením tejto rovnice sú $x = 0$ a $x = \pm 1$. Pre $x = 0$ dostaneme už skôr objavené riešenie $(0, 0)$, pre $x = \pm 1$ máme ďalšie dve riešenia sústavy $(1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Ostáva rozobrať prípad, keď sú oba výrazy $x+y$, $x-y$ nenulové. Pri tejto podmienke môžeme rovnice odvodené na začiatku uvedenými výrazmi vydeliť a dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned}1 &= x^2 - xy + y^2,\\ \frac{1}{2} &= x^2 + xy + y^2.\end{aligned} \tag{2}$$

Z nej opäť sčítaním, resp. odčítaním oboch rovníc odvodíme $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ a $xy = -\frac{1}{4}$. Na základe toho máme

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

teda $x+y = \frac{1}{2}$ alebo $x+y = -\frac{1}{2}$. Hodnoty neznámych x, y vieme potom podľa Viètových vzťahov dostať riešením kvadratických rovníc

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0, \qquad \text{resp.} \qquad t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0.$$

Keďže ich koreňmi sú $t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$, resp. $t_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$, dostávame štyri riešenia (t_1, t_2), (t_2, t_1), (t_3, t_4), (t_4, t_3).

Záver. Sústava má spolu 9 rôznych riešení, sú nimi usporiadané dvojice

$$\begin{gathered}(0,0),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), (1,1),\ (-1,-1),\\ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\\ \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Z postupu vyplýva, že všetky spĺňajú pôvodnú sústavu, skúška teda (pri tomto postupe) nie je nutná.

Iné riešenie. Ak $|x| > 1$, tak z prvej rovnice vyplýva $|y| = |x|(4x^2 - 3) > |x| > 1$. Z druhej rovnice následne rovnako odvodíme $|x| > |y|$, čo je spor. Preto $-1 \leqq x \leqq 1$ a existuje t v intervale $\langle 0, \pi \rangle$ také, že $x = \cos t$. Dosadením do prvej rovnice dostaneme $y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$,[1] z druhej potom podobne $x = 4\cos^3 3t - 3\cos 3t = \cos 9t$. Preto musí platiť $\cos t = \cos 9t$, odkiaľ po úprave

$$\begin{aligned} \cos 9t - \cos t &= 0, \\ -2 \sin \frac{9t + t}{2} \sin \frac{9t - t}{2} &= 0, \\ \sin 5t \sin 4t &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Preto $5t$ alebo $4t$ musí byť násobkom π. Spolu s podmienkou $0 \leqq t \leqq \pi$ dostávame riešenia tvaru $(\cos t, \cos 3t)$ pre

$$t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{5}, \pi \right\}.$$

(Skúška ani v tomto prípade nie je nutná.)

Iné riešenie. Vyjadrením $y = 4x^3 - 3x$ z prvej rovnice a dosadením za y do druhej dostaneme po úprave

$$\begin{aligned} x + 3(4x^3 - 3x) &= 4(4x^3 - 3x)^3, \\ 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 8x &= 0, \\ x(32x^8 - 72x^6 + 54x^4 - 15x^2 + 1) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Mnohočlen v zátvorke po substitúcii $x^2 = z$ prejde na mnohočlen štvrtého stupňa $32z^4 - 72z^3 + 54z^2 - 15z + 1$, ktorý môžeme rozložiť na súčin tak, že uhádneme jeho korene $z = 1$ a $z = \frac{1}{2}$ a následne ho vydelíme príslušnými koreňovými činiteľmi. Odvodená rovnica pre neznámu x tak prejde na tvar

$$2x(x^2 - 1)(x^2 - \tfrac{1}{2})(16x^4 - 12x^2 + 1) = 0.$$

Doriešením bikvadratickej rovnice $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$ (napríklad substitúciou $x^2 = z$) už ľahko určíme všetky riešenia. Sú nimi

$$x \in \left\{ 0,\ \pm 1,\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm\sqrt{\tfrac{3}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{5}} \right\}$$

(treba sa presvedčiť, že výraz pod odmocninou je pre každú kombináciu znamienok kladný). Ku každej z uvedených deviatich hodnôt x už ľahko dopočítame riešenie tvaru $(x, 4x^3 - 3x)$, skúška opäť vzhľadom na postup nie je nutná.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov, a to aj v prípade že riešenia nie sú uvedené presne v tvare (3); stačí aj tvar ako pri druhom alebo treťom uvedenom postupe alebo akýkoľvek iný podobný zápis obsahujúci všetkých 9 riešení.

[1] Na odvodenie rovnosti $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ stačí použiť známy vzorec $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Pri postupe ako v prvom uvedenom riešení dajte po jednom bode za každý z rozkladov v (1) a po jednom bode za rozbor situácie $x+y=0$, resp. $x-y=0$, spolu však najviac 3 body. Štvrtý bod dajte za prepis na sústavu (2), piaty bod za určenie oboch hodnôt $x+y=\pm\frac{1}{2}$ a $xy=-\frac{1}{4}$ a šiesty bod za správne vyriešenie kvadratických rovníc.

Pri druhom postupe dajte 1 bod za dôkaz, že $-1 \leqq x \leqq 1$, ďalší bod dajte za substitúciu $x = \cos t$. Tretí bod je za odvodenie $y = \cos 3t$, štvrtý bod za rovnicu $\cos t = \cos 9t$ a posledné 2 body za jej kompletné vyriešenie v intervale $\langle 0, \pi\rangle$ (tieto 2 body možno rozdeliť, napr. za odvodenie (4) bez následného nájdenia riešení možno udeliť piaty bod).

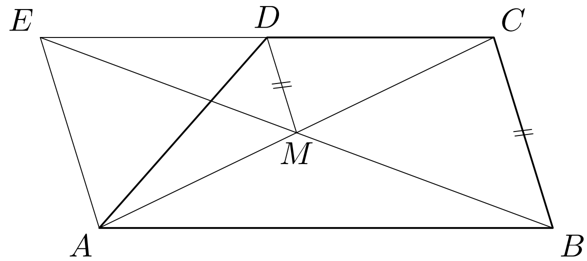
Pri treťom postupe len za vyjadrenie $y = 4x^3 - 3x$ a dosadenie do druhej rovnice bez ďalšej úpravy nedávajte žiadny bod – prvý bod dajte až za bezchybnú úpravu na tvar (5). Po jednom bode dajte za vyňatie pred zátvorku každého z činiteľov x, (x^2-1), $(x^2-\frac{1}{2})$ (resp. za nájdenie príslušných koreňov a zníženie stupňa mnohočlena, ktorého korene hľadáme). Posledné dva body dajte za vyriešenie bikvadratickej rovnice.

Ak žiak (pri akomkoľvek správnom postupe) nenájde všetkých 9 riešení, dajte najviac 5 bodov. Toľko dajte aj v prípade, že žiak rieši sústavu dôsledkovými (neekvivalentnými) úpravami (t. j. z postupu jednoducho nevyplýva, že nájdené riešenia naozaj spĺňajú pôvodnú sústavu), nájde všetky riešenia, ale neurobí skúšku. (Bod za chýbajúcu skúšku strhnite iba v prípade, že inak je postup bezchybný.)

---

2. *V rovine uvažujme lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD a označme M stred jeho uhlopriečky AC. Dokážte, že ak majú trojuholníky ABM a ACD rovnaké obsahy, tak sú priamky DM a BC rovnobežné.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Úsečka BM je ťažnicou v trojuholníku ABC, delí ho teda na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Podľa zadania má jeden z týchto trojuholníkov rovnaký obsah ako trojuholník ACD. Preto má trojuholník ABC dvakrát väčší obsah ako trojuholník ACD. Tieto trojuholníky majú pritom zhodné výšky na strany AB, CD (ktoré sa zhodujú s výškou uvažovaného lichobežníka). Vzhľadom na ich obsahy teda platí $|AB| = 2|CD|$.



Obr. 1

Na priamke CD uvažujme taký bod E, že D je stredom úsečky CE (obr. 1). Z odvodenej rovnosti $|AB| = 2|CD|$ vyplýva zhodnosť úsečiek CE a AB. Štvoruholník $ABCE$ je preto rovnobežník a bod M (ako stred jeho uhlopriečky AC) je súčasne stredom jeho uhlopriečky BE. Úsečka DM je teda strednou priečkou v trojuholníku BCE, čiže je rovnobežná s jeho stranou BC, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Dôkaz rovnobežnosti priamok DM a BC možno podobne urobiť s využitím stredu F základne AB uvažovaného lichobežníka $ABCD$ (čím vznikne rovnobežník $AFCD$). Iným možným postupom je zostrojiť priesečník G priamok AD a BC a využiť vlastnosti stredných priečok v trojuholníkoch ABG a CGA.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 1 bod za pozorovanie, že trojuholník ABC má oproti trojuholníku ACD dvojnásobný obsah, ďalšie 2 body za odvodenie rovnosti $|AB| = 2|CD|$ (alebo rovnosti $|AF| = |CD|$ vyplývajúcej z toho, že trojuholníky AFM a CDM majú zhodné výšky z vrcholu M), 1 bod za objav rovnobežníka $ABCE$ (alebo rovnobežníka $AFCD$) a posledné 2 body za dôkaz rovnobežnosti DM, BC.

3. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je súčin $(2^n + 1)(3^n + 2)$ deliteľný číslom 5^n.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Skúmajme pre ktoré hodnoty n sú jednotlivé činitele zadaného súčinu deliteľné piatimi. Vypíšeme činitele pre malé hodnoty n a vypíšeme tiež ich zvyšky po delení piatimi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$2^n + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	…
zvyšok po delení 5	3	0	4	2	3	0	4	2	…
$3^n + 2$	5	11	29	83	245	731	2 189	6 563	…
zvyšok po delení 5	0	1	4	3	0	1	4	3	…

Ako možno uhádnuť z tabuľky, postupnosť zvyškov činiteľa $2^n + 1$ po delení piatimi je tvorená štvoricou 3, 0, 4, 2, ktorá sa periodicky opakuje. Dokázať to môžeme napríklad tak, že ukážeme, že čísla $2^n + 1$ a $2^{n+4} + 1$ dávajú pre každé prirodzené n po delení piatimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný piatimi:

$$(2^{n+4} + 1) - (2^n + 1) = 2^{n+4} - 2^n = 2^n(2^4 - 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2^n.$$

Podobne postupnosť zvyškov činiteľa $3^n + 2$ po delení piatimi tvorí periodicky sa opakujúca štvorica 0, 1, 4, 3, lebo rozdiel

$$(3^{n+4} + 2) - (3^n + 2) = 3^{n+4} - 3^n = 3^n(3^4 - 1) = 5 \cdot 16 \cdot 3^n$$

je pre každé prirodzené n deliteľný piatimi.

Z uvedeného vyplýva, že $2^n + 1$ je deliteľné piatimi len pre $n = 2, 6, 10, \ldots$, zatiaľ čo $3^n + 2$ je deliteľné piatimi len pre $n = 1, 5, 9, \ldots$, čiže pre žiadne n nie sú piatimi deliteľné oba činitele zadaného súčinu. Aby bol teda súčin deliteľný číslom 5^n, musí ním byť deliteľný jeden z činiteľov. Avšak pre každé $n \geqq 2$ je zrejme $5^n > 3^n + 2$ a tiež $5^n > 2^n + 1$, takže 5^n nemôže deliť ani jedného z činiteľov. Jedine pre $n = 1$ máme $5^1 = 3^1 + 2$. Preto jediné vyhovujúce číslo je $n = 1$.

Za úplné vyriešenie úlohy dajte 6 bodov. Po jednom bode (spolu dva body) dajte za objav postupností zvyškov po delení piatimi pre každý činiteľ (body udeľte aj v prípade, že riešiteľ len bez dôkazu prehlási, že postupnosti sú periodické, nakoľko táto skutočnosť je dostatočne evidentná a známa), resp. za akékoľvek správne zdôvodnenie, že $5 \mid 2^n + 1$ len pre n tvaru $4k + 2$ a $5 \mid 3^n + 2$ len pre n tvaru $4k + 1$. Ďalšie dva body dajte za úvahu, že 5^n musí deliť jedného činiteľa; piaty bod dajte za zdôvodnenie, že pre $n \geqq 2$ to nie je možné (pritom zrejmé nerovnosti $5^n > 3^n + 2$ a $5^n > 2^n + 1$ nie je nutné zdôvodňovať); posledný bod za uvedenie správnej odpovede $n = 1$. Žiak, ktorý bez akéhokoľvek zdôvodnenia iba prehlási, že jediné vyhovujúce je $n = 1$, dostane 1 bod. Ak žiak považuje za prirodzené číslo aj $n = 0$ a uvedie ho tiež v odpovedi, body nestŕhajte.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: 1. Pavel Calábek, 2. Jaroslav Švrček, 3. Ján Mazák

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2011

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Označme S_n súčet všetkých n-ciferných čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje iba cifry 1, 2, 3, každú aspoň raz. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré je číslo S_n deliteľné siedmimi.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Súčet S_n nájdeme tak, že zistíme, koľkokrát sa ktorá cifra nachádza vo všetkých uvažovaných číslach na mieste jednotiek, desiatok, stoviek, atď. Potom určíme, aký je „príspevok“ jednotlivých cifier do celkového súčtu.

Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, tak zvyšných $n-1$ pozícií môžeme zaplniť 3^{n-1} spôsobmi (pre každú pozíciu máme tri možnosti). Takto sme ale bohužiaľ započítali aj čísla zložené len z jednotiek a dvojok, teda čísla neobsahujúce *aspoň jednu* cifru 3; tých je zrejme 2^{n-1}. Takisto nesmieme započítať ani čísla zložené len z jednotiek a trojok, ktorých je tiež 2^{n-1}. (Stále počítame s cifrou 1 na mieste jednotiek.)[1] Keďže číslo zložené zo samých jednotiek sa nachádza v obidvoch nesprávne započítaných skupinách (a žiadne iné také číslo nie je), navyše sme započítali $2 \cdot 2^{n-1} - 1$ čísel. Cifra 1 sa teda na mieste jednotiek nachádza k-krát, pričom $k = 3^{n-1} - (2 \cdot 2^{n-1} - 1) = 3^{n-1} - 2^n + 1$.

Rovnako veľa krát sa nachádza cifra 1 aj na každej ďalšej pozícii (za rovnakých podmienok zapĺňame vždy $n-1$ zvyšných pozícií). Pre príspevok p cifry 1 do celkového súčtu preto platí

$$p = k + 10k + 100k + \cdots + 10^{n-1}k = (1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{n-1})k = \frac{10^n - 1}{9}k.$$

Príspevok cifry 2, resp. 3, je zrejme 2-krát, resp. 3-krát väčší ako príspevok cifry 1, keďže na jednotlivých pozíciách sa tieto cifry nachádzajú rovnako veľa krát ako cifra 1. Spolu máme

$$S_n = p + 2p + 3p = 6p = 6 \cdot \frac{10^n - 1}{9}k = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

Toto číslo je deliteľné *prvočíslom* 7 práve vtedy, keď je ním deliteľný aspoň jeden z činiteľov $10^n - 1$, $3^{n-1} - 2^n + 1$ (činiteľ $\frac{2}{3}$ deliteľnosť siedmimi samozrejme neovplyvňuje). Vypíšeme činitele pre malé hodnoty n a vypíšeme tiež ich zvyšky po delení siedmimi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^n - 1$	9	99	999	9 999	99 999	999 999	...	
zvyšok po delení 7	2	1	5	3	4	0	2	1
$3^{n-1} - 2^n + 1$	0	0	2	12	50	180	602	1 932
zvyšok po delení 7	0	0	2	5	1	5	0	0

Ako možno uhádnuť z tabuľky, postupnosť zvyškov činiteľa $10^n - 1$ po delení siedmimi je tvorená šesticou 2, 1, 5, 3, 4, 0, ktorá sa periodicky opakuje[2]. Dokázať to môžeme

[1] Čísla majúce na zvyšných $n-1$ pozíciách len dvojky a trojky započítavať budeme, pretože požadovanú aspoň jednu (a zároveň práve jednu) cifru 1 majú na mieste jednotiek.

[2] Pri vypĺňaní tabuľky nemusíme prácne deliť siedmimi čísla $10^n - 1$. Stačí využiť, že 10^{n+1} dáva po delení siedmimi rovnaký zvyšok ako 10-násobok *zvyšku* čísla 10^n.

napríklad tak, že ukážeme, že čísla $10^n - 1$ a $10^{n+6} - 1$ dávajú pre každé prirodzené n po delení siedmimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný siedmimi:

$$(10^{n+6} - 1) - (10^n - 1) = 10^{n+6} - 10^n = 10^n(10^6 - 1) = 7 \cdot 142\,857 \cdot 10^n.$$

(Pri poslednej úprave sa možno vyhnúť priamemu deleniu a skonštatovať, že z malej Fermatovej vety vyplýva $7 \mid 10^6 - 1$.)

Postupnosť zvyškov činiteľa $3^{n-1} - 2^n + 1$ po delení siedmimi je taktiež periodická a tvorí ju opakujúca sa šestica 0, 0, 2, 5, 1, 5, pretože rozdiel

$$\begin{aligned}(3^{n+5} - 2^{n+6} + 1) - (3^{n-1} - 2^n + 1) &= (3^{n+5} - 3^{n-1}) - (2^{n+6} - 2^n) = \\ &= 3^{n-1}(3^6 - 1) - 2^n(2^6 - 1) = 7 \cdot (104 \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot 2^n)\end{aligned}$$

je pre každé prirodzené n deliteľný siedmimi.

Z uvedeného vyplýva, že S_n je deliteľné siedmimi (t. j. dáva zvyšok 0 po delení siedmimi) práve pre tie prirodzené čísla $n \geqq 3$, ktoré možno zapísať v tvare $6m$, $6m+1$ alebo $6m+2$ pre nejaké prirodzené číslo m, čiže pre čísla n dávajúce po delení šiestimi zvyšok 0, 1 alebo 2.

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov. Za odvodenie vzorca pre výpočet S_n dajte 3 body; za kompletnú analýzu, pre ktoré n je $10^n - 1$, resp. $3^{n-1} - 2^n + 1$ deliteľné siedmimi, dajte 1 bod, resp. 2 body.

Pri analýze výrazu $10^n - 1$ bod udeľte aj v prípade, že riešiteľ len bez dôkazu prehlási, že postupnosť zvyškov je periodická od prvého opakujúceho sa člena, nakoľko táto skutočnosť je dostatočne evidentná a známa. Pri výraze $3^{n-1} - 2^n + 1$ je periodickosť s periódou dĺžky 6 nutné zdôvodniť (napr. tak, ako je uvedené v riešení, alebo osobitnou analýzou zvyškov jednotlivých mocnín 3^{n-1} a 2^n), bez toho z dvoch bodov jeden strhnite.

Ak žiak nesprávne odvodí vzorec pre S_n tak, že započíta aj čísla zložené len z dvoch rôznych cifier, t. j. pracuje so vzťahom $S_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)3^{n-1}$, za prvú časť udeľte 1 bod (za správne určenie jednotlivých príspevkov, resp. iné odvodenie tohto vzťahu) a za druhú časť tiež 1 bod (za správnu analýzu deliteľnosti siedmimi výrazu $10^n - 1$), spolu teda najviac 2 body.

Ak žiak odvodí vzorec v tvare $S_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n)$ (t. j. nesprávne aplikuje princíp inklúzie a exklúzie a zabudne pripočítať 1), ktorý ďalej analyzuje správne, za prvú časť dajte 1 bod a za druhú 2 body (po jednom za každý činiteľ), teda spolu najviac 3 body.

---

2. *Dané je celé číslo a väčšie ako* 1. *Nájdite aritmetickú postupnosť s prvým členom a, ktorá obsahuje práve dve z čísel* a^2, a^3, a^4, a^5 *a má čo najväčšiu diferenciu. (Nepredpokladáme, že diferencia je nutne celočíselná.)* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Aritmetická postupnosť $\mathcal{A}$ s prvým členom a a kladnou diferenciou d obsahuje práve tie z čísel a^2, a^3, a^4, a^5, pre ktoré je príslušný rozdiel

$$\begin{aligned} a^2 - a &= a(a-1), \\ a^3 - a &= a(a-1)(a+1), \\ a^4 - a &= a(a-1)(a^2+a+1), \\ a^5 - a &= a(a-1)(a+1)(a^2+1) \end{aligned} \tag{1}$$

celým násobkom čísla d. Predpokladajme, že $\mathcal{A}$ obsahuje práve dve z čísel a^2, a^3, a^4, a^5.

Ak $a^2 \in \mathcal{A}$, tak prvý rozdiel $a(a-1)$ je celým násobkom d. Keďže $a \in \mathbb{Z}$, sú potom aj ostatné tri rozdiely v (1) (ktoré sú očividne celočíselnými násobkami prvého rozdielu) celými násobkami d. To však znamená, že $\mathcal{A}$ obsahuje všetky čísla a^2, a^3, a^4, a^5, čo je v spore s predpokladom, že obsahuje práve dve z nich. Preto $a^2 \notin \mathcal{A}$, teda $\mathcal{A}$ obsahuje práve dve z čísel a^3, a^4, a^5.

Ak $a^3 \notin \mathcal{A}$, tak nutne $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, čiže výrazy

$$\frac{a^4 - a}{d}, \qquad \frac{a^5 - a}{d}$$

sú oba celočíselné. Potom je celým číslom aj ich kombinácia

$$\frac{a^5 - a}{d} - a \cdot \frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^2 - a}{d},$$

teda $a^2 \in \mathcal{A}$, čo je spor. Preto $a^3 \in \mathcal{A}$.

Dokázali sme, že hľadaná aritmetická postupnosť $\mathcal{A}$ musí obsahovať číslo a^3. Pre jej diferenciu d tak platí odhad $d \leqq a^3 - a$, pričom rovnosť nastane (t. j. diferencia bude najväčšia) v prípade, že a^3 je jej druhým členom. Aritmetická postupnosť s prvým členom a a diferenciou $d = a^3 - a$ určite neobsahuje číslo a^2, obsahuje a^3 a obsahuje aj $a + (a^2 + 1)(a^3 - a) = a^5$. Stačí už iba overiť, že neobsahuje a^4. To vyplýva z toho[3], že výraz

$$\frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^4 - a}{a^3 - a} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} = a + \frac{1}{a + 1}$$

nie je celým číslom pre žiadne kladné celé číslo a.

Záver. Hľadaná postupnosť je aritmetická postupnosť s prvým členom a a diferenciou $d = a^3 - a$.

Poznámka. Ak uhádneme výsledok a ukážeme, že postupnosť s diferenciou $d = a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, na dokončenie riešenia už stačí ukázať iba to, že diferencia nemôže byť väčšia ako $a^3 - a$. Ak je však diferencia väčšia, tak $\mathcal{A}$ zrejme neobsahuje a^2 ani a^3, musí teda obsahovať a^4 aj a^5 a z toho rovnako ako v uvedenom riešení možno odvodiť $a^2 \in \mathcal{A}$ a tým dôjsť k sporu.

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov.

Ak žiak správne odvodí odhad $d \leqq a^3 - a$, skonštatuje, že najväčšia možná diferencia je $a^3 - a$, ale neukáže, že postupnosť s touto diferenciou vyhovuje, dajte len 4 body. Ďalší 1 bod dajte až za overenie, že v tomto prípade $a^5 \in \mathcal{A}$, resp. 1 bod za dôkaz, že $a^4 \notin \mathcal{A}$.

Ak naopak žiak ukáže, že postupnosť s diferenciou $a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, ale nevysvetlí, prečo diferencia nemôže byť väčšia, dajte len 3 body.

V prípade, že sa riešiteľ nedostane k úvahám o diferencii $a^3 - a$, dajte 1 bod za dôkaz, že $a^2 \notin \mathcal{A}$ (t. j. za dôkaz implikácie $a^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^3, a^4, a^5 \in \mathcal{A}$), 1 bod za dôkaz implikácie $a^3 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^5 \in \mathcal{A}$ a 3 body za dôkaz implikácie $a^4, a^5 \in \mathcal{A} \Rightarrow a^2 \in \mathcal{A}$; spolu však v tejto vetve najviac 4 body.

[3] Argumentovať možno aj takto: V predošlom odseku sme všeobecne dokázali, že ak $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, tak $a^2 \in \mathcal{A}$. My už o $\mathcal{A}$ vieme, že obsahuje a^5 a neobsahuje a^2. Preto nemôže obsahovať a^4.

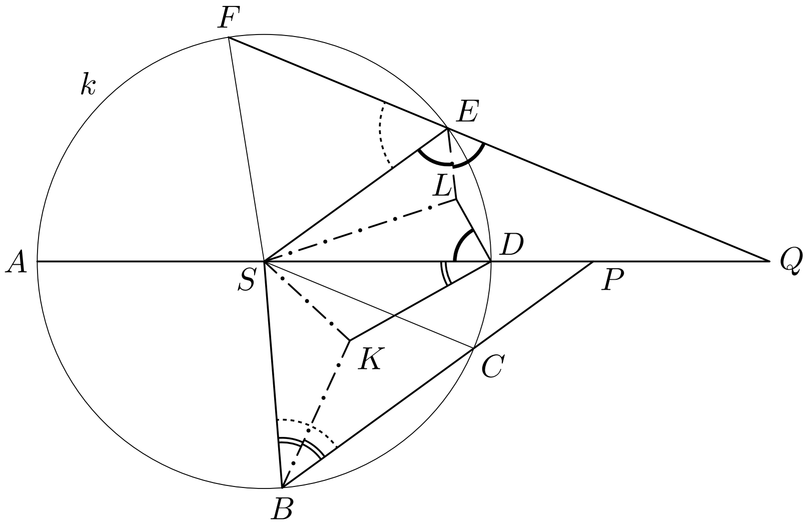
3. *Do kružnice je vpísaný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom platí $AB \perp BD$, $|BC| = |EF|$. Predpokladajme, že priamky BC, EF pretínajú polpriamku AD postupne v bodoch P, Q. Označme S stred uhlopriečky AD a K, L stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BPS, EQS. Dokážte, že trojuholník KLD je pravouhlý.*

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Označme k kružnicu opísanú zadanému šesťuholníku. Keďže $AB \perp BD$, je k Tálesovou kružnicou nad priemerom AD a stred S uhlopriečky AD je zároveň stredom kružnice k.

Dokážeme, že trojuholník KLD má pravý uhol pri vrchole D. Veľkosť uhla KDL je súčtom veľkostí uhlov KDS a LDS. Trojuholníky KDS, KBS sú zhodné podľa vety *sus*: stranu SK majú spoločnú, strany SD, SB sú obe polomerom kružnice k a uhol pri vrchole S majú trojuholníky zhodný, lebo SK je osou uhla BSP (obr. 1). Preto $|\measuredangle KDS| = |\measuredangle KBS|$. Odtiaľ vzhľadom na to, že BK je osou uhla SBP, vyplýva $|\measuredangle KDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS|$.

Analogickou úvahou (s využitím zhodnosti trojuholníkov LDS, LES) dostaneme $|\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle QES|$.



Obr. 1

Pre dokončenie riešenia stačí aplikovať zatiaľ nepoužitý predpoklad $|BC| = |EF|$. Vďaka nemu sú podľa vety *sss* trojuholníky BCS, EFS zhodné (všetky ich zvyšné strany sú polomermi kružnice k), teda $|\measuredangle CBS| = |\measuredangle FES|$. Spojením odvodených poznatkov máme

$$|\measuredangle KDL| = |\measuredangle KDS| + |\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS| + \frac{1}{2}|\measuredangle QES| = \frac{1}{2}|\measuredangle FES| + \frac{1}{2}|\measuredangle QES| = \\ = \frac{1}{2}(|\measuredangle FES| + |\measuredangle QES|) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov. Z toho 1 bod za pozorovanie, že AD je priemerom k; 3 body za odvodenie rovností $|\measuredangle KDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS|$, $|\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle QES|$ (ak má riešiteľ len jednu z nich, dajte 2 body; ak ukáže len $|\measuredangle KDS| = |\measuredangle KBS|$ a/alebo $|\measuredangle LDS| = |\measuredangle LES|$, dajte 1 bod); 2 body za rovnosť $|\measuredangle CBS| = |\measuredangle FES|$ a úspešné dokončenie riešenia.

4. *Predpokladajme, že pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí*

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a+b+c+d$ a zistite, ktoré vyhovujúce štvorice a, b, c, d ju dosahujú. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Keďže zadané rovnosti obsahujú zmiešané súčiny premenných, výhodné je skúmať druhú mocninu súčtu $a + b + c + d$. Úpravou s dosadením zadaných rovností dostaneme

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + cd + ac + bd + ad + bc) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(4 + 4 + 5) = a^2 + d^2 + b^2 + c^2 + 26.\end{aligned} \tag{1}$$

Využijeme známe nerovnosti $a^2 + d^2 \geqq 2ad$, $b^2 + c^2 \geqq 2bc$, v ktorých rovnosť platí práve vtedy, keď $a = d$ a $b = c$. Na základe toho z (1) máme

$$(a + b + c + d)^2 \geqq 2ad + 2bc + 26 = 2 \cdot 5 + 26 = 36.$$

Preto pre kladné čísla a, b, c, d musí platiť $a + b + c + d \geqq \sqrt{36} = 6$.

Rovnosť platí práve vtedy, keď $a = d$ a $b = c$. Dosadením do pôvodných rovností dostaneme sústavu

$$2ab = 4, \qquad a^2 + b^2 = 5.$$

Tú možno vyriešiť viacerými rôznymi postupmi. Napríklad môžeme vyjadriť

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5 + 4 = 9,$$

teda $a + b = 3$ (keďže $a, b > 0$). Podľa Viètových vzťahov sú a, b koreňmi kvadratickej rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$, teda $\{a, b\} = \{1, 2\}$. Ľahko overíme, že štvorice $a = d = 1$, $b = c = 2$, resp. $a = d = 2$, $b = c = 1$ skutočne spĺňajú zadané rovnosti a platí pre ne $a + b + c + d = 6$.

Odpoveď. Najmenšia možná hodnota súčtu $a + b + c + d$ je 6, dosahujú ju štvorice $(1, 2, 2, 1)$ a $(2, 1, 1, 2)$.

Iné riešenie. Z rovnosti $ab + cd = ac + bd$ vyplýva $a(b - c) = d(b - c)$, takže platí $a = d$ alebo $b = c$. Vzhľadom na symetriu môžeme uvažovať iba vyhovujúce štvorice (a, b, c, d), v ktorých je $d = a$, a hľadať tak najmenšiu hodnotu súčtu $S = 2a + b + c$ za predpokladu, že kladné čísla a, b, c spĺňajú rovnosti $a(b + c) = 4$ a $a^2 + bc = 5$.

Podľa Viètových vzťahov sú potom kladné čísla b, c koreňmi kvadratickej rovnice

$$x^2 - \frac{4}{a}x + (5 - a^2) = 0.$$

Tá má dva kladné (nie nutne rôzne) korene práve vtedy, keď je jej diskriminant

$$D = \frac{16}{a^2} - 4(5 - a^2) = \frac{4(a^2 - 1)(a^2 - 4)}{a^2}$$

nezáporný a keď okrem nerovnosti $a > 0$ platí aj $a^2 < 5$. Dokopy to znamená, že $a \in \in (0,1\rangle \cup \langle 2, \sqrt{5})$.

Všimnime si, že pre $a = 1$ vychádzajú korene $b = c = 2$, naopak pre $a = 2$ je $b = c = 1$. V oboch týchto prípadoch má zrejme výraz $S = 2a + b + c$ hodnotu 6. Ak ukážeme, že pre ostatné prípustné a platí $S > 6$, bude to znamenať, že $\min S = 6$ a že $(1,2,2,1)$ a $(2,1,1,2)$ sú jediné štvorice dávajúce nájdené minimum (keďže v oboch z nich platí $b = c$, žiadne iné také štvorice – napriek obmedzeniu našich úvah na prvú z možností $a = d$, $b = c$ – neexistujú). Z vyjadrenia rozdielu $S - 6$ v tvare

$$S - 6 = 2a + b + c - 6 = 2a + \frac{4}{a} - 6 = \frac{2(a-1)(a-2)}{a}$$

vidíme, že žiadaná nerovnosť $S > 6$ naozaj platí pre každé $a \in (0,1) \cup (2, \sqrt{5})$.

Za správne riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 4 body za odhad $a + b + c + d \geqq 6$ a 2 body za určenie štvoríc, pre ktoré platí rovnosť.

Ak riešiteľ na odhad štvorcov v (1) použije AG-nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, $c^2 + d^2 \geqq 2cd$ a odvodí tak slabší odhad $a + b + c + d \geqq \sqrt{34}$, dajte 2 body.

Pri postupe ako v druhom riešení dajte 1 bod za odvodenie rovnosti $(a - d)(b - c) = 0$, 1 bod za prechod k riešeniu sústavy o dvoch neznámych b, c s parametrom a, 2 body za nájdenie množiny prípustných hodnôt a (alebo aspoň odvodenie nutnej podmienky $a \leqq 1 \vee a \geqq 2$), 1 bod za dôkaz nerovnosti $2a + 4/a \geqq 6$ pre všetky prípustné a a 1 bod za určenie oboch hľadaných štvoríc.

V prípade, že žiak len uhádne výsledok a objaví štvorice $(1,2,2,1)$ a $(2,1,1,2)$, dajte 1 bod (tento bod udeľte len v prípade, že žiak v úlohe nezíska žiadne iné body).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012