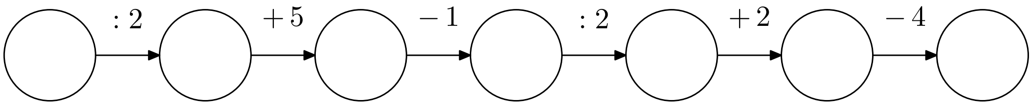
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
skmo.sk

2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie Z4*

(*Termín odovzdania: prvá trojica úloh v pondelok 15. 11. 2010,*
druhá trojica úloh v pondelok 13. 12. 2010.)

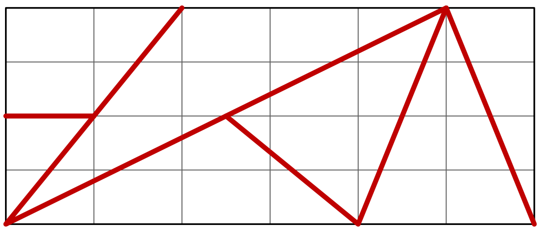
1. Doplň do prázdnych políčok čísla od 1 do 7 každé raz tak, aby matematické operácie boli vypočítané správne. (*M. Smitková*)



2. Miško a Jarka sú súrodenci. Jarka má narodeniny niekedy v januári. O Miškovi vieme, že v roku 2010 bola od Jarkiných narodenín po Miškove narodeniny presne jedna sobota trinásteho. Zisti, v ktorom mesiaci sa narodil Miško. Nájdi všetky možnosti. (*M. Dillingerová*)

3. Koľko trojciferných čísiel má prvú číslicu trikrát väčšiu ako druhú a tretiu číslicu o 4 menšiu ako prvú? Vypíš všetky také čísla. (*M. Smitková, M. Dillingerová*)

4. Jožkovi sa podarilo rozlámať čokoládu na takéto kúsky:



Dala by sa táto čokoláda bez ďalšieho lámania spravodlivo rozdeliť dvom kamarátom? Ako? Dala by sa táto čokoláda spravodlivo rozdeliť bez ďalšieho lámania trom kamarátom? Ako? Ak sa to dá, nájdi vždy aspoň jeden spôsob. (*M. Dillingerová*)

5. Na stôl do kuchyne položila mamička vylúskaný hrach v miske. Danka a Janka pochúťku objavili a začali hrášky z misky vyjedať. Dohodli sa, že Danka si bude z misky brať vždy 2 guľôčky hrachu. Janka si bude pravidelne brať 2, 4, 1 a 1 guľôčku hrachu a potom začne opäť od začiatku. Najskôr si vzala z misky Danka 2 hrášky, potom Janka 2, opäť Danka 2, Janka svoje 4, atď. Zrazu prišla do kuchyne ich mamička a prekvapene zhíkla: „Veď v miske už zostala iba polovica hrachu!“ Dievčatá začali byť zvedavé a spočítali, že tam ostalo 45 guľôčok hrachu. Ak sa mamička nemýlila a zvyšných 45 guľôčok bola naozaj polovica z toho, čo bolo v miske na začiatku, zjedli potom dievčatá rovnako alebo niektorá zjedla viac? Koľko hráškov zjedla Danka? A koľko ich zjedla Janka? (*M. Dillingerová*)

6. V našej bytovke je 10 bytov. Niektoré majú 4, niektoré 3 a niektoré 2 okná. Na našej bytovke je celkom 27 okien. Bytov s dvomi oknami je v bytovke najviac. Koľko je ktorých bytov? (*M. Dillingerová*)

2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie Z5*

(*Termín odovzdania: prvá trojica úloh v pondelok 15. 11. 2010,*
druhá trojica úloh v pondelok 13. 12. 2010.)

1. Vlado má napísané dve čísla, 541 a 293. Zo šiestich použitých cifier má najskôr vyškrtnúť dve tak, aby súčet dvoch takto získaných čísel bol najväčší možný. Potom má z pôvodných šiestich cifier vyškrtnúť dve tak, aby rozdiel dvoch takto získaných čísel bol najmenší možný (odčíta menšie číslo od väčšieho). Ktoré cifry má v jednotlivých prípadoch vyškrtnúť? (*M. Petrová*)

2. V Trpasličom kráľovstve merajú vzdialenosti v rozprávkových míľach (rm), v rozprávkových siahach (rs) a v rozprávkových lakťoch (rl). Na vstupnej bráne do Trpasličieho kráľovstva je nasledujúca tabuľka na prevody medzi ich jednotkami a našimi:

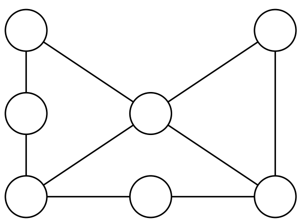
- 1 rm = 385 cm,
- 1 rs = 105 cm,
- 1 rl = 250 mm.

Kráľ Trpaslík I. nechal premerať vzdialenosť od zámockej brány k rozprávkovému jazierku. Traja pozvaní zememerači dospeli k týmto výsledkom: prvý nameral 4 rm 4 rs 18 rl, druhý 3 rm 2 rs 43 rl a tretí 6 rm 1 rs 1 rl. Jeden z nich sa však pomýlil. Aká je vzdialenosť v centimetroch od zámockej brány k rozprávkovému jazierku? O koľko centimetrov sa pomýlil nepresný zememerač? (*M. Petrová*)

3. Štyria kamaráti Adam, Mojmír a dvojčatá Peter a Pavol získali na hodinách matematiky celkom 52 smajlíkov, každý aspoň 1. Pritom dvojčatá dokopy majú 33, ale najúspešnejší bol Mojmír. Koľko ich získal Adam? (*M. Volfová*)

4. Pán Tik a pán Tak predávali budíky v predajniach „Pred Rohom“ a „Za Rohom“. Pán Tik tvrdil, že „Pred Rohom“ predali o 30 budíkov viac ako „Za Rohom“, zatiaľ čo pán Tak tvrdil, že „Pred Rohom“ predali trikrát viac budíkov ako „Za Rohom“. Nakoniec sa ukázalo, že Tik aj Tak mali pravdu. Koľko budíkov predali v oboch predajniach celkom? (*L. Hozová*)

5. Do krúžkov na obrázku doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby súčet čísel na každej vyznačenej línii bol rovnaký. Žiadne číslo pritom nesmie byť použité viackrát. (*M. Smitková*)



6. Pani Šikovná čakala večer hostí. Najskôr pre nich pripravila 25 chlebíčkov. Potom spočítala, že by si každý hosť mohol zobrať dva, ale po troch by už na všetkých nevyšlo. Povedala si, že keby vyrobila ešte 10 chlebíčkov, mohol by si každý hosť vziať tri, ale štyri nie každý. To sa jej zdalo stále málo. Nakoniec prichystala dokopy 52 chlebíčkov. Každý hosť by si teda mohol vziať štyri chlebíčky, ale po päť by už všetkých nevyšlo. Koľko hostí pani Šikovná čakala? Ona sama drží diétu a večer nikdy neje. (*L. Šimůnek*)

2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie Z6*

(*Termín odovzdania: prvá trojica úloh v pondelok 13. 12. 2010,*
druhá trojica úloh v pondelok 28. 2. 2011.)

1. Keď Bernard natieral dvere garáže, pretrel omylom aj stupnicu nástenného vonkajšieho teplomera. Trubička s ortuťou však zostala nepoškodená, a tak Bernard pôvodnú stupnicu prelepil pásikom vlastnej výroby. Na nej starostlivo narysoval dieliky, všetky boli rovnako veľké a označené číslami. Jeho dielik mal však inú veľkosť ako pôvodný dielik, ktorý predstavoval jeden stupeň Celzia, a aj nulu Bernard umiestnil inde, ako bolo 0°C. Takto začal Bernard merať teplotu vo vlastných jednotkách: bernardoch. Keď by mal teplomer ukazovať teplotu 18°C, ukazoval 23 bernardov. Keď by mal ukazovať 9°C, ukazoval 8 bernardov. Aká je teplota v °C, ak vidí Bernard na svojom teplomere teplotu 13 bernardov? (*L. Šimůnek*)

2. Firma vyrábajúca mikrovlnné rúry predávala na trhu vždy po krátkej prezentácii svoje modely. Vo štvrtok predala osem rovnakých mikrovlniek. Deň nato už ponúkala aj svoj nový model a ľudia si tak mohli kúpiť ten istý ako vo štvrtok alebo nový. V sobotu chceli všetci záujemcovia nový model a firma ich predala v ten deň šesť. V jednotlivých dňoch utŕžila 590 €, 720 € a 840 €, neprezradíme však, ktorá suma patrí ku ktorému dňu.

- Koľko stál starší model mikrovlnky?
- Koľko nových modelov predala firma v piatok?

Poznámka. Cena každej mikrovlnky bola v celých eurách. (*L. Šimůnek*)

3. Vojto napísal číslo 2010 stokrát bez medzier za sebou. Koľko štvorciferných a koľko päťciferných súmerných čísel bolo skrytých v tomto zápise? (Súmerné číslo je také číslo, ktoré je rovnaké, či ho čítame spredu alebo zozadu, napr. 39193.) (*L. Hozová*)

4. Súčin vekov deda Vendelína a jeho vnúčat je 2010. Súčet vekov všetkých vnúčat je 12 a žiadne dve vnúčatá nemajú rovnako veľa rokov. Koľko vnúčat má dedo Vendelín? (*L. Hozová*)

5. Na tábore sa dvaja vedúci s dvoma táborníkmi a psom potrebovali dostať cez rieku a k dispozícii mali iba jednu loďku s nosnosťou 65 kg. Našťastie všetci (okrem psa) dokázali loďku cez rieku priviezť. Každý vedúci vážil približne 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Ako si mali počínať? Koľkokrát najmenej musela loďka prekonať rieku? (*M. Volfová*)

6. Karol obstaval krabicu s obdĺžnikovým dnom obrubou z kocôčok. Použil práve 22 kocôčok s hranou 1 dm, ktoré staval tesne vedľa seba v jednej vrstve. Medzi obrubou a stenami krabice nebola medzera a celá táto stavba mala obdĺžnikový pôdorys. Aké rozmery mohlo mať dno krabice? (*M. Krejčová*)

2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie Z7*

(*Termín odovzdania: prvá trojica úloh v pondelok 13. 12. 2010,*
druhá trojica úloh v pondelok 28. 2. 2011.)

1. Súčin cifier ľubovoľného viacciferného čísla je vždy menší ako toto číslo. Ak počítame súčin cifier daného čísla, potom súčin cifier tohto súčinu, potom znova súčin cifier nového súčinu atď., nutne po nejakom počte krokov dospejeme k jednocifernému číslu. Tento počet krokov nazývame *perzistencia* čísla. Napr. číslo 723 má perzistenciu 2, lebo $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

- Nájdite najväčšie nepárne číslo, ktoré má navzájom rôzne cifry a perzistenciu 1.
- Nájdite najväčšie párne číslo, ktoré má navzájom rôzne nenulové cifry a perzistenciu 1.
- Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má perzistenciu 3. (*S. Bednářová*)

2. Ondro na výlete utratil $\frac{2}{3}$ peňazí a zo zvyšku dal ešte $\frac{2}{3}$ na školu pre deti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zvyšku kúpil malý darček pre mamičku. Z deravého vrecka stratil $\frac{4}{5}$ zvyšných peňazí, a keď zo zvyšných dal polovicu malej sestričke, ostalo mu práve jedno euro. S akou sumou išiel Ondro na výlet? (*M. Volfová*)

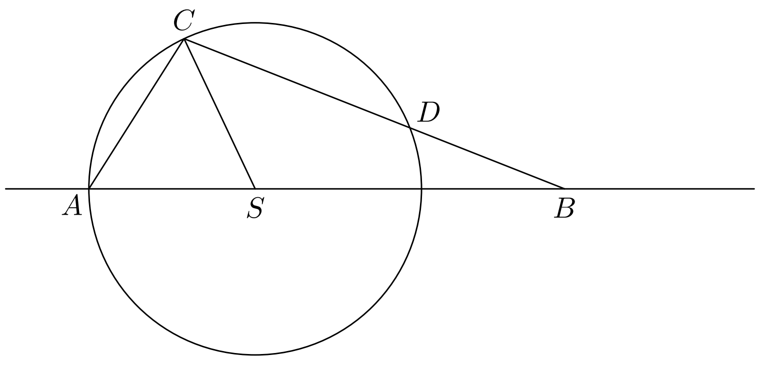
3. Silvia prehlásila:

„Sme tri sestry, ja som najmladšia, Lívia je staršia o tri roky a Edita o osem. Naša mamka rada počuje, že všetky (aj s ňou) máme v priemere 21 rokov. Pritom keď som sa narodila, mala mamka už 29.“

Pred koľkými rokmi sa Silvia narodila? (*M. Volfová*)

4. Juro mal napísané štvorciferné číslo. Toto číslo zaokrúhlil na desiatky, na stovky a na tisícky a všetky tri výsledky zapísal pod pôvodné číslo. Všetky štyri čísla správne sčítal a dostal 5 443. Ktoré číslo mal Juro napísané? (*M. Petrová*)

5. Laco narysoval kružnicu so stredom S a body A, B, C, D, ako ukazuje obrázok. Zistil, že úsečky SC a BD sú rovnako dlhé. V akom pomere sú veľkosti uhlov ASC a SCD?



(*L. Hozová*)

6. Nájdite všetky trojciferné prirodzené čísla, ktoré sú bezo zvyšku deliteľné číslom 6 a v ktorých môžeme vyškrtnúť ktorúkoľvek cifru a vždy dostaneme dvojciferné prirodzené číslo, ktoré je tiež bezo zvyšku deliteľné číslom 6. (*L. Šimůnek*)

2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie Z8*

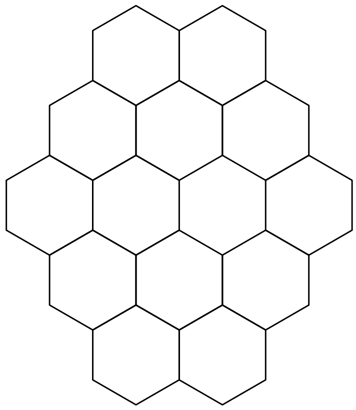
(*Termín odovzdania: prvá trojica úloh v pondelok 13. 12. 2010,
druhá trojica úloh v pondelok 28. 2. 2011.*)

1. Martin má na papieri napísané päťciferné číslo s piatimi rôznymi ciframi a nasledujúcimi vlastnosťami:

- škrtnutím druhej cifry zľava (t. j. cifry na mieste tisícok) dostane číslo, ktoré je deliteľné dvoma,
- škrtnutím tretej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné tromi,
- škrtnutím štvrtej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné štyrmi,
- škrtnutím piatej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné piatimi,
- ak neškrtne žiadnu cifru, má číslo deliteľné šiestimi.

Ktoré najväčšie číslo môže mať Martin napísané na papieri? (*M. Petrová*)

2. Karol sa snažil do prázdnych políčok na obrázku vpísať prirodzené čísla od 1 do 14 tak, aby žiadne číslo nebolo použité viackrát a súčet všetkých čísel na každej priamej línii bol rovnaký. Po chvíli si uvedomil, že to nie je možné. Ako by ste Karolovo pozorovanie zdôvodnili vy? (Pod priamou líniou rozumieme skupinu všetkých susediacich políčok, ktorých stredy ležia na jednej priamke.) (*S. Bednářová*)



3. Cena encyklopédie „Hádanky, rébusy a hlavolamy“ bola znížená o 62,5 %. Matej zistil, že obe ceny (pred znížením aj po ňom) sú dvojciferné čísla a dajú sa vyjadriť rovnakými ciframi, len v rôznom poradí. O koľko € bola encyklopédia zlacnená? (*M. Volfová*)

4. Rozdeľte kocku s hranou 8 cm na menšie zhodné kocôčky tak, aby súčet ich povrchov bol päťkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky. Aký bude objem malej kocôčky a koľko centimetrov bude merať jej hrana? (*M. Volfová*)

5. Klára, Lenka a Matej si precvičovali písomné delenie so zvyškom. Ako delenca mal každý zadané iné prirodzené číslo, ako deliteľa však mali všetci rovnaké prirodzené číslo. Lenkin delenec bol o 30 väčší ako Klárin. Matejov delenec bol o 50 väčší ako Lenkin. Kláre vyšiel vo výsledku zvyšok 8, Lenke zvyšok 2 a Matejovi zvyšok 4. Všetci počítali bez chyby. Aký deliteľ mali žiaci zadaný? (*L. Šimůnek*)

6. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ sú uhlopriečky AC a DB na seba kolmé, ich dĺžka je 8 cm a dĺžka najdlhšej strany AB je tiež 8 cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka. (*M. Krejčová*)

2010/2011
60. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie Z9*

(*Termín odovzdania: prvá trojica úloh v pondelok 15. 11. 2010,*
druhá trojica úloh v pondelok 13. 12. 2010.)

1. Pán Vlk čakal na zastávke pred školou na autobus. Z okna počul slová učiteľa:

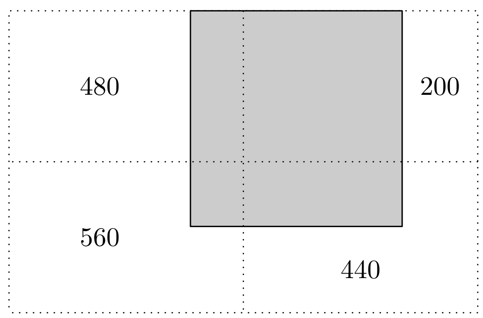
„Aký povrch môže mať pravidelný štvorboký hranol, ak viete, že dĺžky všetkých jeho hrán sú v centimetroch vyjadrené celými číslami a že jeho objem je. . . “

Toto dôležité číslo pán Vlk nepočul, pretože práve prešlo okolo auto. Za chvíľu počul žiaka oznamujúceho výsledok 918 cm^2. Učiteľ na to povedal:

„Áno, ale úloha má celkom štyri riešenia. Hľadajte ďalej.“

Viac sa pán Vlk už nedozvedel, lebo nastúpil do svojho autobusu. Keďže matematika bola vždy jeho hobby, vybral si v autobuse ceruzku a papier a po čase určil aj zvyšné tri riešenia učiteľovej úlohy. Spočítajte ich aj vy. (*L. Šimůnek*)

2. Na obrázku sú bodkovanou čiarou znázornené hranice štyroch rovnako veľkých obdĺžnikových parciel. Sivou farbou je význačná zastavaná plocha. Tá má tvar obdĺžnika, ktorého jedna strana tvorí zároveň hranice parciel. Zapísané čísla vyjadrujú obsah nezastavanej plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2. Vypočítajte obsah celkovej zastavanej plochy. (*L. Šimůnek*)



3. Vĺčkovci lisovali jablkový mušt. Mali ho v dvoch rovnako objemných súdkoch, v oboch takmer rovnaké množstvo. Keby z prvého preliali do druhého 1 liter, mali by v oboch rovnako, ale to by ani jeden súdok nebol plný. Tak radšej preliali 9 litrov z druhého do prvého. Potom bol prvý súdok úplne plný a mušt v druhom zapĺňal práve tretinu objemu. Koľko litrov muštu vylisovali, aký bol objem súdkov a koľko muštu v nich bolo pôvodne? (*M. Volfová*)

4. Pán Rýchly a pán Ťarbák v rovnakom čase vyštartovali na tú istú turistickú trasu, len pán Rýchly ju išiel zhora z horskej chaty a pán Ťarbák naopak od autobusu dolu v mestečku na chatu smerom nahor. Keď bolo 10 hodín, stretli sa na trase. Pán Rýchly sa ponáhľal a už o 12:00 bol v cieli. Naopak pán Ťarbák postupoval pomaly, a tak dorazil na chatu až o 18:00. O koľkej páni vyrazili na cestu, ak vieme, že každý z nich išiel celý čas svojou stálou rýchlosťou? (*M. Volfová*)

5. Kružnici so stredom S a polomerom 12 cm sme opísali pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ a vpísali pravidelný šesťuholník $TUVXYZ$ tak, aby bod T bol stredom strany BC. Vypočítajte obsah a obvod štvoruholníka $TCUS$. (*M. Krejčová*)

6. Peter a Pavol oberali v sade jablká a hrušky. V pondelok zjedol Peter o 2 hrušky viac ako Pavol a o 2 jablká menej ako Pavol. V utorok Peter zjedol o 4 hrušky menej ako v pondelok. Pavol zjedol v utorok o 3 hrušky viac ako Peter a o 3 jablká menej ako Peter. Pavol zjedol za oba dni 12 jabĺk a v utorok zjedol rovnaký počet jabĺk ako hrušiek. V utorok večer obaja chlapci zistili, že počet jabĺk, ktoré spolu za oba dni zjedli, je rovnako veľký ako počet spoločne zjedených hrušiek. Koľko jabĺk zjedol Peter v pondelok a koľko hrušiek zjedol Pavol v utorok? (*L. Hozová*)