2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Lucia napísala na tabuľu dve nenulové čísla. Potom medzi ne postupne vkladala znamienka plus, mínus, krát a delené a všetky štyri príklady správne vypočítala. Medzi výsledkami boli iba dve rôzne hodnoty. Aké dve čísla mohla Lucia na tabuľu napísať?* (*Peter Novotný*)

Riešenie. Označme hľadané čísla a, b. Keďže $b \neq 0$, nutne $a + b \neq a - b$. Každé z čísel $a \cdot b$, $a : b$ je rovné buď $a + b$, alebo $a - b$. Stačí teda rozobrať štyri prípady a v každom z nich vyriešiť sústavu rovníc. Ukážeme si však rýchlejší postup.

Ak by platilo

$$a + b = a \cdot b \quad \text{a} \quad a - b = a : b \qquad \text{alebo} \qquad a + b = a : b \quad \text{a} \quad a - b = a \cdot b,$$

vynásobením rovností by sme v oboch prípadoch dostali $a^2 - b^2 = a^2$, čo je v spore s $b \neq 0$. Preto sú čísla $a \cdot b$ a $a : b$ buď obe rovné $a + b$ alebo obe rovné $a - b$. Tak či tak musí platiť $a \cdot b = a : b$, odkiaľ po úprave $a(b^2 - 1) = 0$. Keďže $a \neq 0$, nutne $b \in \{1, -1\}$. Ale ak $b = 1$, tak štyri výsledky sú postupne $a + 1$, $a - 1$, a, a, čo sú pre každé a až tri rôzne hodnoty. Pre $b = -1$ máme výsledky $a - 1$, $a + 1$, $-a$, $-a$. Dva rôzne výsledky to budú práve vtedy, keď $a - 1 = -a$ alebo $a + 1 = -a$. V prvom prípade dostávame $a = \frac{1}{2}$, v druhom $a = -\frac{1}{2}$.

Lucia mohla na začiatku na tabuľu napísať buď čísla $\frac{1}{2}$ a -1, alebo čísla $-\frac{1}{2}$ a -1.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Máme tri čísla so súčtom 2010, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch. Aké sú to čísla? [Zostavíme a vyriešime sústavu rovníc, čísla musia byť rovnaké a teda sú rovné 670.]

N2. Máme tri čísla, o ktorých vieme, že každé z nich je aritmetickým priemerom niektorých dvoch z našich troch čísel. Dokážte, že naše tri čísla sú rovnaké. [Predpokladajme, že niektoré z našich čísel je priemerom seba a iného z našich čísel. Potom ich vieme označiť a, b, c tak, že $a = (a + b)/2$. Z tejto rovnosti vyplýva $a = b$. Číslo c je buď priemerom čísel a a b, z čoho hneď máme, že je týmto číslam rovné, alebo je priemerom seba a niektorého z čísel a, b, čiže $c = (c + a)/2$, z toho opäť dostaneme $c = a = b$. Ak každé z našich čísel je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch, riešime predošlú úlohu.]

D1. Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 2. Máme n čísel so súčtom n, pričom každé z nich je aritmetickým priemerom ostatných čísel. Aké sú to čísla? [Usporiadajme si naše čísla podľa veľkosti, nech $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$. Aritmetický priemer skupiny čísel je aspoň taký, ako najmenšie z nich. Aritmetický priemer čísel $x_2, x_3, \ldots, x_n$ je preto aspoň x_2, a je rovný x_1 len v prípade, že žiadne z čísel $x_3, \ldots, x_n$ nie je väčšie ako x_2. Z toho hneď dostávame, že všetky naše čísla musia byť rovnaké a teda rovné 1.]

2. *Dokážte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y.* (*Jaroslav Zhouf*)

Riešenie. Predpokladajme, že pre dvojicu prirodzených čísel x, y platí $50 \mid 23x + y$. Potom pre nejaké prirodzené číslo k platí $23x + y = 50k$. Z tejto rovnosti dostaneme $y = 50k - 23x$, čiže $19x + 3y = 19x + 3(50k - 23x) = 150k - 50x = 50(3k - x)$, takže číslo $19x + 3y$ je násobkom čísla 50.

Podobne to funguje aj z druhej strany. Ak pre nejakú dvojicu prirodzených čísel x, y platí $50 \mid 19x + 3y$, tak $19x + 3y = 50l$ pre nejaké prirodzené číslo l. Z tejto rovnosti vyjadríme číslo y; dostaneme $y = (50l - 19x)/3$ (ďalší postup by bol podobný, aj keby sme vyjadrili x miesto y). Po dosadení dostaneme

$$23x + y = 23x + \frac{50l - 19x}{3} = \frac{69x + 50l - 19x}{3} = \frac{50 \cdot (x + l)}{3}.$$

O výslednom zlomku vieme, že je to prirodzené číslo. Čitateľ tohto zlomku je deliteľný číslom 50. V menovateli je len číslo 3, ktoré je nesúdeliteľné s 50, preto sa číslo 50 nemá s čím z menovateľa vykrátiť a teda číslo $23x + y$ je deliteľné 50.

Iné riešenie. Zrejme $3 \cdot (23x + y) - (19x + 3y) = 50x$, čiže ak 50 delí jedno z čísel $23x + y$ a $19x + 3y$, tak delí aj druhé z nich.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ukážte, že každé prvočíslo väčšie ako 3 sa dá napísať v tvare $6k + 1$ alebo $6k - 1$ pre vhodné prirodzené číslo k. [Každé prvočíslo sa dá napísať v tvare $6k + z$, kde z je jeho zvyšok po delení šiestimi. Čísla $6k$, $6k+2$ a $6k+4$ sú evidentne deliteľné dvoma, $6k+3$ je deliteľné tromi, preto ostávajú len čísla v tvare $6k + 1$ a $6k + 5$.]

N2. Nech $x + 5y$ dáva zvyšok 1 po delení 7. Aký zvyšok po delení 7 dáva číslo $3x + 15y$? A číslo $4x + 13y$? [Keďže $x + 5y = 7k + 1$ pre vhodné k, máme $3x + 15y = 3(7k + 1) = 7 \cdot 3k + 3$, čiže zvyšok je 3. Podobne $4x + 20y = 4(7k + 1) = 7 \cdot 4k + 4$, pritom číslo $4x + 13y$ sa od $4x + 20y$ líši len o násobok 7, preto dáva rovnaký zvyšok.]

D1. Dokážte, že ak pre celé čísla a, b, c platí $7 \mid a - 3b + 5c$, tak platí aj $7 \mid 4a + 2b - c$. Zistite, či platí opačná implikácia. [Platí aj opačná implikácia. Návod: $(4a + 2b - c) - 4(a - 3b + 5c) = 14b - 21c = 7(2b - 3c)$.]

D2. Dokážte, že ku každému celému číslu x existuje celé číslo y také, že $19x+3y$ je deliteľné 50. [Číslo $19x$ dáva po delení 50 zvyšok, ktorý označíme z. Chceme ukázať, že pre ľubovoľné z vieme nájsť y tak, aby číslo $3y$ dávalo zvyšok $50 - z$. Vezmime si čísla $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \ldots, 3 \cdot 50$. Keby dve z týchto čísel, povedzme $3i$ a $3j$, dávali rovnaký zvyšok, musí byť ich rozdiel $3(i-j)$ deliteľný 50. Pritom 3 a 50 sú nesúdeliteľné, preto $50 \mid i - j$. To však nie je možné, lebo $1 \leqq i - j \leqq 49$. Preto vymenované čísla dávajú všetky možné rôzne zvyšky po delení 50, a teda jedno z nich dáva zvyšok $50 - z$.]

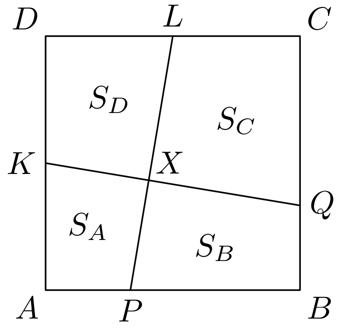
---

3. *Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC. Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 1).*

a) Dokážte, že $S_B = S_D$.

b) Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.

c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. (Peter Novotný)



Obr. 1

Riešenie. a) Štvoruholníky $ABQK$ a $DAPL$ sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o 90° so stredom v strede štvorca $ABCD$). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hneď dostaneme $S_B = S_D$.

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka $ABQK$, lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

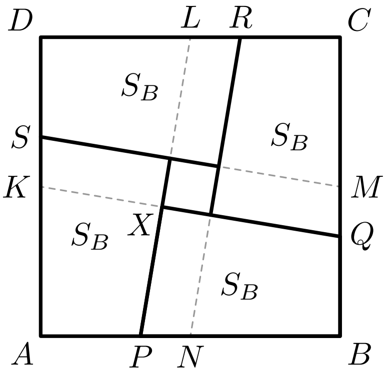
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka $PBCL$ dostaneme

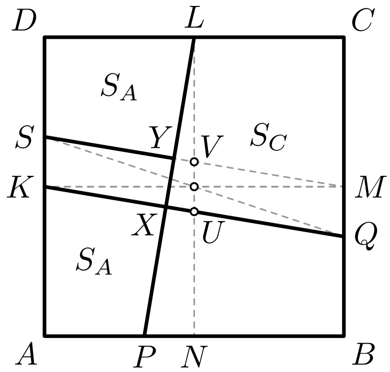
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

c) Nerovnosť medzi obsahmi $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, ako už vieme), keď ukážeme, že obsah S_B je menší ako $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Urobíme to tak, že do celého štvorca $ABCD$ umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka $PBQX$. Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 2, pričom M, N sú stredy strán BC, AB a R, S body, ktoré delia strany CD, DA v pomere $1 : 2$.



Obr. 2



Obr. 3

Iné riešenie časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentnú nerovnosť $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Preto sa pokúsime „premiestniť" štvoruholník $APXK$ tak, aby ležal pri štvoruholníku $XQCL$ a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly AKQ a DLP sú zhodné a $|AK| = |DL|$, preto môžeme štvoruholník $APXK$ premiestniť vo štvorci $ABCD$ do jeho „rohu" D tak, že k štvoruholníku $XQCL$ priľahne pozdĺž strany LX svojou stranou LY, pričom Y je priesečník úsečiek SM a PL z pôvodného riešenia (obr. 3). Obsah $S_A + S_C$ je potom obsahom šesťuholníka $DSYXQC$. Prečo je väčší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod L so stredom U úsečky KQ pretne úsečku SM v jej strede V. Štvoruholník $UQMV$ má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka $KQMS$, teda rovný obsahu trojuholníka KMS. Preto má šesťuholník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu štvoruholníka $KMCD$, t. j. polovici obsahu štvorca $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka $XUVY$. Teda naozaj $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Daný je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a priesečníkom uhlopriečok P. Vieme, že obsah trojuholníka ABP je 16 a obsah trojuholníka BCP je 10.
 a) Vypočítajte obsah trojuholníka ADP.
 b) Vypočítajte obsah lichobežníka $ABCD$.
[Trojuholníky ABC a ABD majú spoločnú stranu AB a rovnaké výšky na túto stranu, teda majú rovnaký obsah. Preto majú rovnaký obsah trojuholníky ADP a BCP. Obsah trojuholníka CDP vyrátame napríklad z jeho podobnosti s trojuholníkom ABP, pomer podobnosti je $|AP|/|CP| = S_{ABP}/S_{CBP}$. Dostaneme $S_{ABCD} = 169/4$.]

N2. Vo štvorci $ABCD$ s obsahom 1 označme K, L po rade stredy strán AB, AD. Priamky CK a BL sa pretínajú v bode M, priamky CL a KD sa pretínajú v bode N. Ukážte, že súčet obsahov trojuholníkov KBM, KLN a CDN nie je väčší ako 3/8. [Priamo vypočítať obsahy jednotlivých trojuholníkov ide len ťažko. Pomohlo by premiestniť tieto trojuholníky „viac k sebe“, aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Napríklad vďaka osovej súmernosti podľa priamky AC je trojuholník KLN zhodný s trojuholníkom KLM. A obsah trojuholníka KBL už vypočítame ľahko, je to 1/8. Ostáva ukázať, že obsah trojuholníka DCN je menší ako 1/4. To hneď vidno z toho, že trojuholník DCN je súčasťou trojuholníka DCL s obsahom 1/4.]

D1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q zodpovedajúce päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$. [C-55-I-5]

D2. V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme E stred strany BC a F stred strany AD. Dokážte, že trojuholníky AED a BFC majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany AB a CD rovnobežné. [C-54-I-3]

D3. Spojnica stredov strán AB a CD konvexného štvoruholníka $ABCD$ rozdelí tento štvoruholník na dve časti s rovnakým obsahom. Ukážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné. [Označme S a T po rade stredy strán AB a CD. Trojuholníky DST a CST majú rovnaký obsah (rovnako dlhé strany DT a CT, spoločná výška). Preto trojuholníky ADS a BCS majú rovnaký obsah, a keďže majú rovnako dlhé strany AS a BS, musia mať aj rovnaké výšky, čiže body D a C sú rovnako vzdialené od priamky AB.]

D4. Nájdite všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$ s nasledujúcou vlastnosťou: v rovine štvoruholníka $ABCD$ existuje bod P taký, že každá priamka vedená bodom P rozdelí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. [49-A-II-4]

---

4. *V skupine n žiakov sa spolu niektorí kamarátia. Vieme, že každý má medzi ostatnými aspoň štyroch kamarátov. Učiteľka chce žiakov rozdeliť na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny tak, že každý bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.*
 a) Ukážte, že v prípade $n = 7$ sa dajú žiaci požadovaným spôsobom vždy rozdeliť.
 b) Zistite, či možno žiakov takto vždy rozdeliť aj v prípade $n = 8$.

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. a) Jediný spôsob, ako rozdeliť 7 žiakov na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny, je mať jednu trojčlennú a jednu štvorčlennú skupinu. Každý žiak zo štvorčlennej skupiny pritom bude mať vo svojej skupine kamaráta pri hocijakom rozdelení, pretože sa nemôže stať, že by všetci jeho kamaráti boli v trojčlennej skupine (sú aspoň štyria).

Takže stačí rozdeliť žiakov tak, že každý v trojčlennej skupine má v nej kamaráta. Preto do nej dáme hociktorého zo žiakov a k nemu niektorých jeho dvoch kamarátov.

b) Vezmime hocijaké rozdelenie 8 žiakov na dve štvorčlenné skupiny. Ak toto rozdelenie nevyhovuje učiteľkinmu zámeru, máme nejakého žiaka X, ktorý je *zle zaradený* – má všetkých svojich štyroch kamarátov A, B, C, D v druhej skupine. Ukážeme, že vieme vymeniť X a niektorého zo žiakov A, B, C, D tak, že počet zle zaradených žiakov sa zmenší.

Po každej zo štyroch výmen prichádzajúcich do úvahy X prestane byť zle zaradený a všetci traja žiaci, ktorí budú s X v skupine, budú dobre zaradení, lebo sú to kamaráti žiaka X. Žiaci K, L, M, ktorí boli pred výmenou v skupine s X, môžu byť po výmene zle zaradení len vtedy, ak boli zle zaradení aj predtým (lebo X nemal ani jedného z nich za kamaráta). Keďže žiak K má štyroch kamarátov a nekamaráti sa s X, musí mať aspoň jedného kamaráta Y aj v skupine obsahujúcej žiakov A, B, C, D, a keď žiaka Y vymeníme s X, bude mať vo svojej novej skupine za kamaráta K.

Ukázali sme teda, že výmenou žiakov X a Y počet zle zaradených žiakov klesol. Dostali sme nejaké nové rozdelenie; ak v ňom je aspoň jeden žiak zle zaradený, môžeme zopakovať predošlý postup a opäť znížiť počet zle zaradených žiakov. Po nanajvýš ôsmich krokoch dostaneme rozdelenie, v ktorom už nie sú žiadni zle zaradení žiaci.

Iné riešenie časti b). Uvažujme všetky možné rozdelenia žiakov na dve štvorčlenné skupiny. Rozdelenia, kde niekto nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta, budeme nazývať *zlé*, ostatné budú *dobré*.

Koľko je zlých rozdelení? Ak má žiak X aspoň päť kamarátov, aspoň jeden z nich musí byť v jeho skupine. Ak má žiak X iba štyroch kamarátov, a všetci sú v druhej skupine, máme len jedno jediné rozdelenie s touto vlastnosťou. Celkovo teda k danému žiakovi X existuje nanajvýš jedno rozdelenie, ktoré je zlé. Za X môžeme zobrať jedného z 8 rôznych žiakov, preto zlých rozdelení je nanajvýš 8 (niektoré sme možno zarátali viackrát). Pritom všetkých rozdelení je $\binom{7}{3} = 35$, čiže aspoň 27 z nich je dobrých.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V istej triede má každý žiak aspoň jedného kamaráta. Ukážte, že vieme žiakov rozdeliť na dve skupiny tak, že každý má v druhej skupine aspoň jedného kamaráta. [K úlohe sa dá pristupovať viacerými poučnými spôsobmi, pozri vzorové riešenie úlohy č. 5 v 3. sérii zimnej časti korešpondenčného matematického seminára KMS, ročník 2005/6, `http://kms.sk/archiv`.]

N2. Každý zo šiestich žiakov istej triedy má medzi ostatnými piatimi aspoň troch kamarátov. Kamarátstvo je vzájomné. Ukážte, že vieme týchto žiakov rozdeliť do dvoch (neprázdnych) skupín tak, že každý žiak má vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta. Vedeli by sme to spraviť aj vtedy, keby každý žiak mal presne dvoch kamarátov? [Ak rozdelíme žiakov hocijakým spôsobom na dvojicu a štvoricu, tak každý žiak zo štvorice má v nej aspoň jedného kamaráta, lebo z jeho aspoň troch kamarátov sú nanajvýš dvaja v druhej skupine. Čiže stačí zobrať dvojicu kamarátov a ostatných dať do druhej skupiny. Ak má každý presne dvoch kamarátov, tiež vieme žiakov rozdeliť: vezmeme žiaka A a jeho dvoch kamarátov B a C a všetkých ich dáme do prvej skupiny. Zvyšní traja žiaci D, E, F budú tvoriť druhú skupinu. Ak by niektorý žiak z druhej skupiny, povedzme D, mal za kamarátov B aj C, tak žiaci E a F budú mať nanajvýš po jednom kamarátovi. Preto D má za kamaráta nanajvýš jedného z B a C, nemôže sa kamarátiť s A, čiže musí mať za kamaráta aspoň jedného zo žiakov E a F. Podobne to funguje pre žiakov E a F. O situácii so šiestimi žiakmi, kde každý má presne dvoch kamarátov, vieme povedať dokonca viac. Ak si zakreslíme žiakov ako body a kamarátsky vzťah reprezentujeme spojením bodov zodpovedajúcich dvom kamarátom, môžeme dostať len dva rôzne obrázky: dva trojuholníky, alebo šesťuholník (pri vhodnom rozmiestnení bodov v rovine).]

D1. V skupine n ľudí ($n \geqq 4$) sa niektorí poznajú. Vzťah „poznať sa" je vzájomný: ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A a nazývame ich dvojicou známych.

a) Dokážte, že ak medzi každými štyrmi osobami sú aspoň štyri dvojice známych, tak každé dve osoby, ktoré sa nepoznajú, majú spoločného známeho.

b) Zistite, pre ktoré $n \geqq 4$ existuje skupina osôb, v ktorej sú medzi každými štyrmi osobami aspoň tri dvojice známych a súčasne sa niektoré dve osoby ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho.

c) Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych. [C-57-I-5]

D2. Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov.

a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole najviac s jedným nepriateľom.

b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozsadenia sedí pri každom stole najviac 16 rytierov.

(Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: Ak A je nepriateľom B, tak aj B je nepriateľom A.)

[51-C-I-6]

---

5. *Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť*

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Nerovnosť by bolo ľahké dokázať, ak by niektorý z dvoch sčítancov na ľavej strane bol sám osebe aspoň taký, ako pravá strana. Číslo $[a, b]$ je zjavne násobkom čísla a. Ak $[a, b] \geqq 2a$, tak $b[a, b] \geqq 2ab$ a v zadanej nerovnosti platí dokonca ostrá nerovnosť, lebo číslo $a(a, b)$ je kladné. Ak $[a, b] < 2a$, tak neostáva iná možnosť, ako $[a, b] = a$. To však nastane iba v prípade, keď $b \mid a$. V tomto prípade $(a, b) = b$ a v zadanej nerovnosti nastane rovnosť.

Iné riešenie. Označme $d = (a, b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla u, v. Z toho hneď vieme, že $[a, b] = uvd$. Keďže

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = ud^2 + uv^2d^2 = u(1 + v^2)d^2,$$
$$2ab = 2uvd^2,$$

je vzhľadom na $ud^2 > 0$ nerovnosť zo zadania ekvivalentná s nerovnosťou $1 + v^2 \geqq 2v$, čiže $(v - 1)^2 \geqq 0$, čo platí pre každé v. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 1$, čiže $b \mid a$.

Iné riešenie. Označme $d = (a, b)$. Je známe, že $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. Po vyjadrení $[a, b]$ z tohto vzťahu, dosadení do zadanej nerovnosti a ekvivalentnej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $d^2 + b^2 \geqq 2bd$, ktorá platí, lebo $(d - b)^2 \geqq 0$. Rovnosť nastáva pre $d = b$, čiže v prípade $b \mid a$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech d je najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel a a b. Ukážte, že čísla a/d a b/d sú celé a nesúdeliteľné.

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b platí vzťah $[a, b] \cdot (a, b) = ab$. [Úvaha o exponentoch jednotlivých prvočísel, alebo štandardným spôsobom: nech $d = (a, b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pre nesúdeliteľné x a y, čiže $[a, b] = xyd$.]

N3. Ukážte, že výraz $[a, 15]/a$, kde a je prirodzené číslo, môže nadobúdať len štyri rôzne hodnoty, ktoré sú všetky celočíselné. Koľko rôznych celočíselných hodnôt môže nadobudnúť výraz $[120, b]/2b$? [Výraz $[60, b]/2b$ môže nadobudnúť celočíselné hodnoty 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, okrem toho nadobúda hodnoty 1/2, 3/2, 5/2, 15/2.]

N4. Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b platí

$$4ab \leqq (a + b)^2 \leqq 2(a^2 + b^2).$$

[Obe nerovnosti sa dajú priamočiaro ukázať z toho, že štvorec reálneho čísla je nezáporný.]

D1. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré súčasne platí $[ab, c] = 2^8$, $[bc, a] = 2^9$, $[ca, b] = 2^{11}$. [50-C-S-1]

D2. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $[a, b] + (a, b) = 63$. [50-C-I-3]

D3. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré má výraz

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

celočíselnú hodnotu. [Nech $d = (a, b)$, potom $a = xd$, $b = yd$ pre nesúdeliteľné x a y. Skúmaný výraz bude po dosadení $(9x^2 + 14y^2)/(9xy)$, takže $9x \mid 14y^2$ a z nesúdeliteľnosti x a y máme $x \mid 14$, navyše $3 \mid y$. Podobne $y \mid 9$; vyskúšame konečne veľa možností.]

D4. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

[58-C-I-6]

---

6. *Je daný lichobežník $ABCD$. Stred základne AB označme P. Uvažujme rovnobežku so základňou AB, ktorá pretína úsečky AD, PD, PC, BC postupne v bodoch K, L, M, N.*

a) Dokážte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určte polohu priamky KL tak, aby platilo aj $|KL| = |LM|$. (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. a) Priamky AB, CD a KL sú rovnobežné, preto v našej situácii vieme nájsť viacero dvojíc podobných trojuholníkov (sú podobné podľa vety *uu*). Tieto podobnosti vieme výhodne zapísať pomocou pomerov vzdialeností, čo využijeme v dôkaze toho, že úsečky KL a MN majú rovnakú dĺžku.

Označme x vzdialenosť priamok AB a KL a y vzdialenosť priamok KL a CD. Tieto vzdialenosti nám umožnia vyjadriť koeficient podobnosti trojuholníkov – tento koeficient je rovný nielen pomeru zodpovedajúcich si strán, ale aj zodpovedajúcich si výšok.

Trojuholníky APD a KLD sú podobné, preto

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y}.$$

Aj trojuholníky BPC a NMC sú podobné, preto

$$\frac{|MN|}{|PB|} = \frac{y}{x+y}.$$

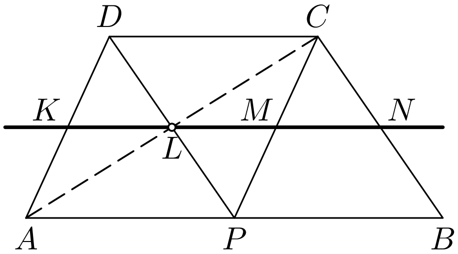
Celkovo dostávame

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y} = \frac{|MN|}{|PB|},$$

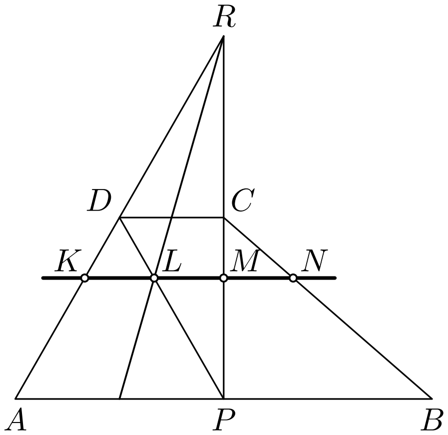
a keďže $|AP| = |PB|$, máme $|KL| = |MN|$.

b) Chceme zostrojiť bod L taký, že $|KL| = |LM|$. Rozoberieme dva prípady podľa toho, či je priamka PC rovnobežná s priamkou AD, alebo nie.

Ak je priamka PC rovnobežná s AD, tak štvoruholník $APCD$ je rovnobežník a jediný vyhovujúci bod L je stred úsečky PD, čiže priesečník uhlopriečok rovnobežníka



Obr. 4



Obr. 5

$APCD$ (podmienka $|KL| = |LM|$ tu vyjadruje zhodnosť trojuholníkov KLD a MLP, ktorá nastane práve vtedy, keď $|LD| = |LP|$, obr. 4).

Ak sa priamky PC a AD pretínajú v nejakom bode R (obr. 5), tak bod L bude priesečníkom úsečky DP s priamkou, na ktorej leží ťažnica trojuholníka APR. Požadovaná vlastnosť $|KL| = |LM|$ vyplýva z toho, že rovnoľahlosť so stredom v bode R zobrazujúca úsečku AP na úsečku KM zobrazí stred úsečky AP na stred úsečky KM.

Z uvedených konštrukcií vyplýva, že vyhovujúci bod L je vždy jediný, čiže vieme skonštruovať práve jednu rovnobežku s priamkou AB s vyhovujúcimi vlastnosťami.

Poznámka. Ako sme uviedli, v prípade, že priamky PC a AD sú rovnobežné, bude vyhovujúcim bodom L priesečník uhlopriečok rovnobežníka $APCD$. Ak priamky PC a AD rovnobežné nie sú, štvoruholník $APCD$ už nebude rovnobežník, ale jeho priesečník uhlopriečok je výborným kandidátom na bod L. Výpočtom s využitím podobnosti sa dá ukázať, že je to naozaj tak a jediným vyhovujúcim bodom L je priesečník uhlopriečok lichobežníka $APCD$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V lichobežníku $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P zostrojíme rovnobežku so základňou AB prechádzajúcu bodom P. Táto priamka pretne ramená AD a BC v bodoch K a L. Ukážte, že bod P je stredom úsečky KL. Vypočítajte dĺžku úsečky KL, ak viete, že $|AB| = a$, $|CD| = c$. [Využijeme podobnosť dvojíc trojuholníkov DKP a DAB, CPL a CAB, PAB a PCD. Ak označíme v_1 výšku trojuholníka PAB a v_2 výšku trojuholníka PCD, tak $|KP| = |LP| = a \cdot v_2/(v_1 + v_2)$. Z toho $|KL| = 2ac/(a + c)$.]

N2. Daný je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Nech X, Y sú po rade priesečníky dvojíc priamok AD a BC, AC a BD. Dokážte, že body X, Y a stredy základní lichobežníka $ABCD$ ležia na jednej priamke. [Rovnoľahlosť so stredom v bode X zobrazujúca úsečku AB na úsečku CD zobrazí stred jednej základne do stredu druhej základne, preto stredy základní a bod X ležia na priamke. Analogicky stredy základní a bod Y ležia na priamke. Je vhodné spraviť aj riešenie využívajúce len podobnosť trojuholníkov bez spoliehania sa na vlastnosti rovnoľahlosti.]

D1. Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme E stred strany AB, F stred úsečky DE a G priesečník úsečiek BD a CE. Vyjadrite obsah lichobežníka $ABCD$ pomocou jeho výšky v a dĺžky d úsečky FG za predpokladu, že body A, F, C ležia na jednej priamke. [56-C-I-4]

D2. Zostrojte lichobežník $ABCD$ s výškou 3 cm a zhodnými stranami BC, CD a DA, pre ktorý platí: Na základni AB existuje bod E taký, že úsečka DE má dĺžku 5 cm a delí lichobežník na dve časti s rovnakými obsahmi. [52-C-I-4]