2010/2011
60. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Korene rovnice*

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

v obore reálnych čísel sú štyri po sebe idúce členy rastúcej aritmetickej postupnosti. Pritom jeden z týchto členov je zároveň riešením rovnice

$$bx^2 + ax + a = 1.$$

Určte všetky možné hodnoty reálnych parametrov a, b. (Peter Novotný)

Riešenie. Vzhľadom na to, že rastúcu aritmetickú postupnosť tvoria štyri navzájom rôzne reálne čísla, musí mať prvá z daných rovníc štyri rôzne reálne korene. Preto $a \neq 0$.

Označme x_0 spoločný koreň oboch rovníc. Potom je x_0 tiež koreňom rovnice, ktorá vznikne odčítaním druhej z daných rovníc od prvej, teda rovnice $ax^4 - ax = 0$. Tú ďalej upravíme na tvar $ax(x^3 - 1) = 0$. Pre spoločný reálny koreň x_0 oboch daných rovníc odtiaľ vyplýva $x_0 = 0$ alebo $x_0 = 1$.

Dosadením $x_0 = 0$ do prvej z daných rovníc dostaneme $a = 1$, takže táto rovnica má tvar $x^4 + bx^2 = 0$. Táto rovnica ale pre žiadne reálne číslo b nemá štyri rôzne reálne korene (číslo 0 je jej aspoň dvojnásobným koreňom), preto $x_0 \neq 0$.

Jediným spoločným koreňom oboch rovníc je teda $x_0 = 1$. Dosadením tejto hodnoty do ktorejkoľvek z oboch daných rovníc dostaneme $b = 1 - 2a$. Prvú rovnicu potom môžeme zapísať v tvare $ax^4 + (1-2a)x^2 + a - 1 = 0$, z ktorého vidíme, že má i koreň -1, a po vyňatí súčinu koreňových činiteľov $(x-1)(x+1)$ dostaneme rovnicu

$$(x-1)(x+1)(ax^2 - a + 1) = 0. \tag{1}$$

Kvadratický dvojčlen $ax^2 - (a-1)$ má mať dva rôzne korene, ktorými musia byť dve navzájom opačné (nenulové) čísla ξ a $-\xi$. To je splnené práve vtedy, keď $(a-1)/a > 0$, čiže práve vtedy, keď $a > 1$ alebo $a < 0$. Ak zvolíme označenie tak, že $\xi > 0$, dostávame pre aritmetickú postupnosť všetkých štyroch koreňov dve možnosti podľa toho, či je $0 < \xi < 1$ alebo $\xi > 1$.

V prvom prípade tvoria štyri korene rovnice (1) aritmetickú postupnosť -1, $-\xi$, ξ, 1, ktorá má zrejme diferenciu $\frac{2}{3}$, preto $\xi = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Toto číslo ξ je koreňom rovnice (1) práve vtedy, keď $a = 1/(1-\xi^2) = \frac{9}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = -\frac{5}{4}$.

V druhom prípade tvoria štyri korene rovnice (1) aritmetickú postupnosť $-\xi$, -1, 1, ξ s diferenciou 2, preto $\xi = 1 + 2 = 3$. Číslo 3 je koreňom rovnice (1) práve vtedy, keď $a = 1/(1-3^2) = -\frac{1}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = \frac{5}{4}$.

Záver. Úlohe vyhovujú práve dve dvojice reálnych čísel (a, b), a to

$$(a, b) \in \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{4}\right) \right\}.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p a q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x-p) = 3 + q, \qquad x(x+p) = 3 - q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice. [59–B–S–1]

N2. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je pre obe rovnice spoločný. [57–B–I–5]

N3. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \qquad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň. [57–B–S–2]

D1. Určte všetky trojčlenné aritmetické postupnosti prvočísel s diferenciou 1970. [20–B–P–2]

D2. Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \qquad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a + b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré uvažovaný súčet tieto hodnoty nadobúda. [57–B–II–1]

D3. Reálne čísla a, b majú nasledovnú vlastnosť: kvadratická rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Vyjadrite korene oboch rovníc pomocou b.

[59–B–I–6]

---

2. *Nech k, n sú prirodzené čísla. Z platnosti tvrdenia „číslo $(n - 1)(n + 1)$ je deliteľné číslom k“ Adam usúdil, že buď číslo $n - 1$, alebo číslo $n + 1$ je deliteľné k. Určte všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je Adamova úvaha správna pre každé prirodzené n.*

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Ukážeme, že pre nesúdeliteľné prirodzené čísla r a s, kde $r > 2$ a $s > 2$, existuje prirodzené číslo n s vlastnosťou

$$r \mid n - 1 \qquad \text{a} \qquad s \mid n + 1.$$

Pre také číslo n a číslo $k = rs$ nie je Adamova úvaha správna, pretože z predpokladu, že číslo k delí číslo $(n-1)(n+1)$, nevyplýva, že k delí $n-1$ ani že k delí $n+1$. Keby totiž $k = rs$ delilo napríklad $n - 1$, delilo by číslo s obidve čísla $n + 1$ i $n - 1$, čo vzhľadom na rovnosť $(n + 1) - (n - 1) = 2$ nie je možné, lebo $s > 2$.

Existenciu čísla n z prvej vety riešenia dokážeme tak, že zoberieme s čísel

$$2,\ r + 2,\ 2r + 2,\ \dots,\ (s - 1)r + 2.$$

Tie dávajú pri delení číslom s navzájom rôzne zvyšky. Keby totiž niektoré dve z nich, povedzme $ir + 2$ a $jr + 2$ $(0 \leqq i < j \leqq s - 1)$, dávali pri delení číslom s rovnaký zvyšok, potom by číslo s delilo aj ich rozdiel $(i - j)r$, a vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel r a s aj rozdiel $i - j$, čo nie je možné, pretože $|i - j| < s$. Uvedených s čísel teda dáva úplnú sústavu zvyškov modulo s, preto medzi nimi existuje číslo, ktoré pri delení číslom s

dáva zvyšok 0; nech je to číslo $lr + 2$. Potom ale pre číslo $n = lr + 1$ platí, že r delí $n - 1$ a s delí $n + 1$.

Uvedomme si, že každé číslo k deliteľné dvoma nepárnymi prvočíslami sa dá zapísať ako súčin dvoch nesúdeliteľných čísel väčších ako 2. Adamova úvaha môže byť teda správna iba pre tie čísla k, ktoré sú deliteľné nanajvýš jedným nepárnym prvočíslom. To znamená, že číslo k má jeden z nasledovných troch tvarov:

$$k = 2^s, \qquad k = p^t, \qquad k = 2p^t,$$

kde p je nepárne prvočíslo, s celé nezáporné a t prirodzené číslo.

Nech $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné číslo. Pre $s = 0$ nie je Adamova úvaha správna, pretože číslo $k = 2^0 = 1$ delí každé prirodzené číslo, teda delí obidve čísla $n - 1$ i $n + 1$. Ani pre $s = 1$ nie je Adamova úvaha správna, pretože pokiaľ $k = 2^1 = 2$ delí číslo $(n - 1)(n + 1)$, je jeden z činiteľov párny, ale potom je párny i druhý činiteľ. Pre číslo $s = 2$, teda pre $k = 2^2 = 4$, je Adamova úvaha správna. Ak totiž 4 delí číslo $(n - 1)(n + 1)$, je aspoň jeden z oboch činiteľov párny, takže ide o dve po sebe idúce *párne* čísla, z ktorých práve jedno je deliteľné štyrmi. Nakoniec, pre žiadne $s \geqq 3$ Adamova úvaha správna nie je, stačí vziať číslo $n = 2^{s-1} - 1$.

Nech $k = p^t$, kde p je nepárne prvočíslo a t prirodzené číslo. Potom je Adamova úvaha správna, lebo obe čísla $n - 1$ a $n + 1$ nemôžu byť súčasne deliteľné tým istým nepárnym prvočíslom p, a preto je práve jedno z nich deliteľné číslom $p^t = k$.

Nech $k = 2p^t$, kde p je nepárne prvočíslo a t prirodzené číslo. Potom je Adamova úvaha tiež správna: obe čísla $n-1$ a $n+1$ sú nutne párne a pritom nemôžu byť súčasne deliteľné tým istým nepárnym prvočíslom p, preto je práve jedno z nich deliteľné číslom $2p^t = k$.

Záver. Adamova úvaha je správna pre každé prirodzené číslo n len pre prirodzené čísla k jedného z tvarov

$$k = 4, \qquad k = p^t, \qquad k = 2p^t,$$

kde p je nepárne prvočíslo a t prirodzené číslo.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Ak je číslo $(n-1)(n+1)$ deliteľné štyrmi, je práve jeden z činiteľov $n-1$, $n+1$ deliteľný štyrmi. Dokážte.

N2. Zistite, pre ktoré dvojciferné čísla n je $n^3 - n$ deliteľné číslom 100. [50–C–S–3]

N3. Nájdite všetky trojciferné čísla n také, že posledné trojčíslie čísla n^2 je zhodné s číslom n. [50–C–I–1]

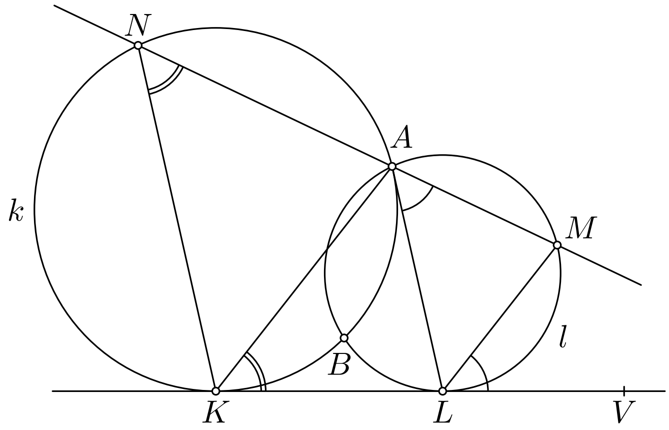
N4. Koľko existuje prirodzených čísel $x \leqq 1\,992\,000$ takých, že číslo $1\,992\,000$ delí číslo $x^3 - x$? [41–B–I–6]

---

3. *Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL.*

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Z rovnosti obvodového a úsekového uhla prislúchajúceho k tetive AK kružnice k vyplýva (obr. 1) $|\measuredangle KNA| = |\measuredangle LKA|$ a podobne z rovnosti obvodového a úsekového uhla prislúchajúceho k tetive AL kružnice l vyplýva $|\measuredangle VLM| = |\measuredangle LAM|$, pričom sme označili V nejaký bod polpriamky opačnej k polpriamke LK.



Obr. 1

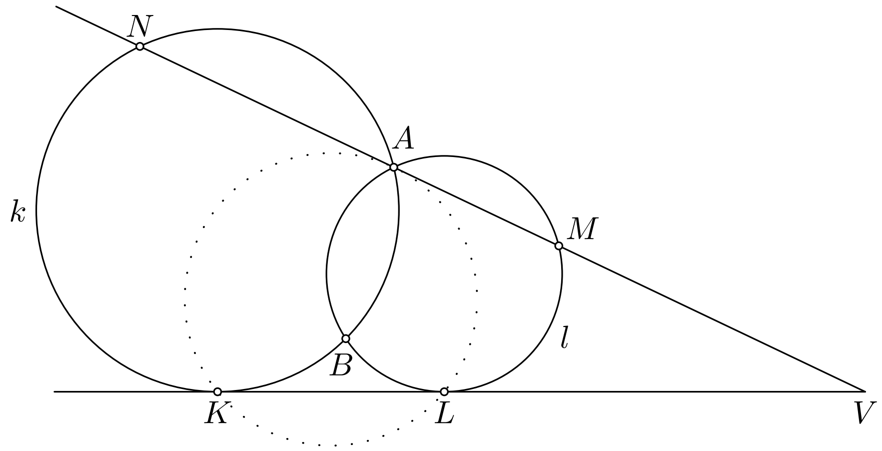
Štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď platí $|\measuredangle KNA| = |\measuredangle VLM|$ čiže $|\measuredangle LKA| = |\measuredangle LAM|$. Posledná rovnosť ale platí práve vtedy, keď je LAM úsekovým uhlom prislúchajúcim k obvodovému uhlu LKA tetivy LA kružnice opísanej trojuholníku AKL, teda práve vtedy, keď je priamka MN dotyčnicou tejto kružnice.

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Iné riešenie. Vyriešme úlohu najskôr za predpokladu, že priamky KL a MN sú rovnobežné. V takom prípade sú zrejme oba trojuholníky ANK a MAL rovnoramenné, pretože osi strán AN, resp. MA prechádzajú príslušným vrcholom K, resp. L (čiže bodom dotyku dotyčnice rovnobežnej s tetivou AN, resp. MA kružnice k, resp. l). Teda $|LA| = |LM|$ a $|KN| = |KA|$. Pritom štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď je to rovnoramenný lichobežník, t. j. $|LM| = |KN|$. To podľa predchádzajúcej dvojice rovností nastane práve vtedy, keď je trojuholník KLA rovnoramenný, čiže práve vtedy, keď MN je dotyčnicou kružnice opísanej tomuto trojuholníku vedenou vrcholom A. (Vzhľadom na to, že potom sú trojuholníky ANK a MAL zhodné, uvedená situácia nastane práve vtedy, keď sú kružnice k a l zhodné.)

Predpokladajme ďalej, že priamky MN a KL sú rôznobežné, a označme V ich priesečník (obr. 2). Použitím mocnosti bodu V ku kružniciam k a l dostaneme

$$|VK|^2 = |VA| \cdot |VN| \qquad \text{a} \qquad |VL|^2 = |VM| \cdot |VA|.$$



Obr. 2

Vynásobením oboch vzťahov dostaneme

$$|VK|^2 \cdot |VL|^2 = |VN| \cdot |VA|^2 \cdot |VM|. \tag{1}$$

Štvoruholník $KLMN$ je ale tetivový práve vtedy, keď platí (pozri návodnú úlohu N1)

$$|VK| \cdot |VL| = |VN| \cdot |VM|$$

čiže – s prihliadnutím na (1) – práve vtedy, keď platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VA|^2.$$

Posledná rovnosť ale platí práve vtedy, keď priamka MN (prechádzajúca bodom A) je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Zopakujte si najskôr učebnicové poznatky o obvodovom, stredovom a úsekovom uhle i s ich dôkazmi. Pripomeňte si taktiež vlastnosť všetkých sečníc danej kružnice idúcich daných bodom, ktorá je vyjadrená mocnosťou bodu ku kružnici.

N1. Priamky KL a MN sa pretínajú v bode V, ktorý leží buď vnútri, alebo mimo oboch úsečiek KL a MN. Dokážte, že body K, L, M, N ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď platí $|VK| \cdot |VL| = |VM| \cdot |VN|$. [Uvážte mocnosť bodu V ku kružnici opísanej trojuholníku KLM a posúďte, kedy druhý priesečník N' tejto kružnice s priamkou VM splýva s bodom N.]

N2. V rovine je daná priamka p a body A, B ($A \neq B$), ktoré ležia v tej istej polrovine vyťatej priamkou p. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodmi A, B a dotýka sa priamky p. [Uvažujte priamku q, na ktorej ležia body A, B, a využite mocnosť jej priesečníka s p k hľadanej kružnici.]

N3. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Kružnica k_1 zostrojená nad stranou AD ako priemerom a kružnica k_2, ktorá prechádza vrcholmi B a C a dotýka sa priamky AB, majú vonkajší dotyk v bode P. Dokážte, že uhly CPD a ABC sú zhodné. [52–B–I–5]

N4. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu prechádzajúcu vrcholmi B, C a dotýkajúcu sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte. [52–B–II–4]

D1. Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na jednej kružnici. [53–A–III–5]

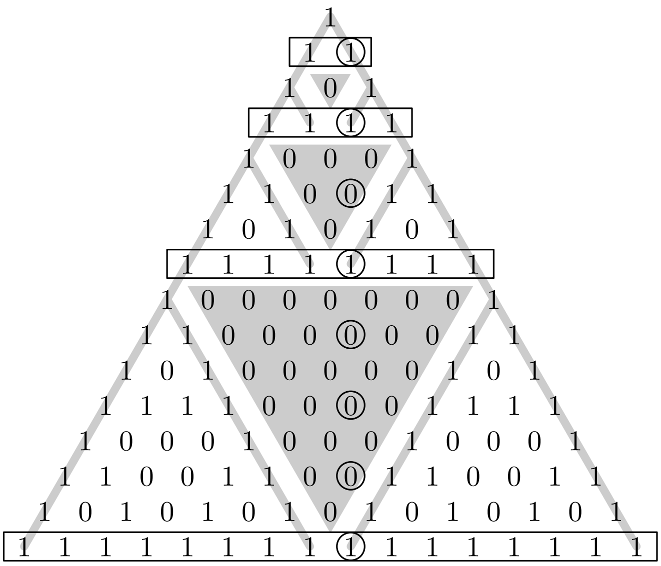
4. *Majme $6n$ žetónov až na farbu zhodných, po troch z každej z $2n$ farieb. Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ určte počet p_n všetkých takých rozdelení $6n$ žetónov na dve kôpky po $3n$ žetónoch, že žiadne tri žetóny rovnakej farby nie sú v rovnakej kôpke. Dokážte, že p_n je nepárne číslo práve vtedy, keď $n = 2^k$ pre vhodné prirodzené k.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Žiadne tri žetóny tej istej farby neležia na jednej kôpke, teda na každej kôpke leží aspoň jeden žetón zvolenej farby. Každé vyhovujúce rozdelenie žetónov na kôpky je potom charakterizované tým, na ktorej z nich leží práve jeden z troch žetónov jednotlivých farieb.

Predpokladajme, že v jednej z kôpok je práve l farieb zastúpených jedným žetónom a zvyšných $2n - l$ farieb dvoma. Jednoduchým výpočtom $l + 2(2n - l) = 3n$ zistíme, že to je možné len pri $l = n$. Preto je skúmaný počet p_n rovný počtu rozdelení $2n$ žetónov navzájom rôznych farieb na dve (neusporiadané) skupiny po n žetónoch, teda

$$p_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)!\, n!} = \binom{2n-1}{n}. \tag{1}$$

Našou úlohou je dokázať, že posledné kombinačné číslo je nepárne práve vtedy, keď je číslo n mocnina dvoch. Tento poznatok (a vlastne i metódu jeho dôkazu) je možné vypozorovať z dobre známej schémy všetkých kombinačných čísel v podobe Pascalovho trojuholníka:



V našej schéme nie sú samotné kombinačné čísla, ale ich zvyšky 0 alebo 1 po delení dvoma. Pre ich určenie nie je nutné kombinačné čísla vôbec počítať, pretože z rekurentných vzorcov

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{a} \quad \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \tag{2}$$

môžeme postupne po jednotlivých riadkoch namiesto kombinačných čísel priamo písať ich zvyšky pri delení akýmkoľvek pevným číslom, v našom prípade číslom 2.

Všimnime si, čo naša schéma napovedá. Niektoré riadky (vyznačené obdĺžničkami) sú zostavené zo samých jednotiek. Vďaka rekurentným vzorcom (2) pod každým takým riadkom zrejme vznikne trojuholník zostavený zo samých núl (tri také trojuholníky sú vyznačené sivou farbou) olemovaný zľava aj sprava samými jednotkami; bezprostredne pod ním opäť leží riadok zo samých jednotiek. Pretože zvyšky všetkých skúmaných čísel $\binom{2n-1}{n}$ (v našej schéme vyznačených krúžkami) ležia v opísaných obdĺžničkoch alebo trojuholníkoch, bude také kombinačné číslo nepárne práve vtedy, keď bude mať pozíciu v niektorom obdĺžničku.

Naše pozorovanie teraz opíšeme presnejšie a priamo ho overíme matematickou indukciou.

Riadky zo samých jednotiek sú práve riadky s kombinačnými číslami $\binom{n-1}{i}$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$*, kde* n *je tvaru* $n = 2^k$.

Tvrdenie triviálne platí pre $k = 1$. Predpokladajme teda, že platí pre nejaké $k \geqq 1$, a označme P_n prvých $n = 2^k$ riadkov schémy. Ďalších n riadkov si môžeme predstaviť ako tri rovnostranné trojuholníky čísel: prvý a tretí s n riadkami sú rovnakej veľkosti ako P_n, medzi nimi je potom $(n-1)$-riadkový trojuholník (vrcholom nadol), ktorý je vďaka jednotkám v základni trojuholníka P_n a rekurentným vzorcom (2) zostavený zo samých núl. Preto majú prvý a tretí trojuholník jednotky nielen v horných vrcholoch a na stranách ležiacich na hranici celej schémy, ale i na stranách, ktorými priliehajú k druhému trojuholníku, teda na začiatku i na konci každého zo svojich n riadkov. Vyplýva to opäť zo vzorcov (2), ktoré potom vedú k ďalšiemu, pre nás hlavnému záveru: Prvý a tretí trojuholník sú totožné s trojuholníkom P_n. Môžeme teda zhrnúť, že každý z $n-1$ pridaných riadkov obsahuje aspoň jednu nulu, ale n-tý riadok (zložený z dvoch n-tých riadkov trojuholníka P_n) obsahuje samé jednotky. Tvrdenie teda platí i pre $2n = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ riadkov Pascalovho trojuholníka modulo 2, t. j. i pre číslo $k+1$.

Vzhľadom na to, že skúmané číslo $p_n = \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ leží vždy v strede párneho riadku Pascalovho trojuholníka, je zrejmé, že leží buď v niektorom obdĺžničku, alebo v niektorom sivom trojuholníku, ktoré sa postupne striedajú. Číslo p_n je teda naozaj nepárne práve vtedy, keď n je mocnina dvoch.

Iné riešenie. Počet p_n opísaných rozdelení žetónov určíme rovnako ako v prvom riešení vzorcom

$$p_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2},$$

ktorý ďalej upravíme na tvar

$$p_n = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)(2n)}{2(n!)^2} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^n n!}{2(n!)^2} = $$
$$= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^{n-1}}{n!}. \tag{3}$$

Pre najvyššiu mocninu 2^a, ktorá delí $n!$, platí (pozri návodnú úlohu N1)

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor,$$

kde $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ a $\lfloor x \rfloor$ označuje *dolnú celú časť čísla* x, teda najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x. Odtiaľ pre exponent a vyplýva odhad

$$a \leqq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^m} = n\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = n - \frac{n}{2^m} \leqq n - 1.$$

Z vyjadrenia (3) teda vidíme, že číslo p_n je nepárne práve vtedy, keď $a = n-1$ čiže n je tvaru 2^m.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Odvoďte tzv. Legendreovu formulu: Najvyššia mocnina prvočísla p, ktorá delí $n!$, má stupeň rovný súčtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

[Uvážte, že prvý sčítanec je rovný počtu tých čísel od 1 do n, ktoré sú deliteľné číslom p, druhý sčítanec je rovný počtu takých čísel, ktoré sú deliteľné nielen p, ale i p^2 atď. Do daného súčtu preto každé z čísel od 1 do n prispeje práve toľkokrát, koľkokrát je prvočíslo p zastúpené v jeho rozklade na prvočinitele.]

N2. Zistite, koľkými nulami končí zápis čísla 2 010!. [501]

D1. O tom, či zadané kombinačné číslo $\binom{n}{k}$, kde $0 \leqq k \leqq n$, je párne alebo nepárne, sa dá jednoducho rozhodnúť pomocou číslic c_i, d_i z binárnych zápisov parametrov n a k:

$$n = c_0 + c_1 2^1 + c_2 2^2 + c_3 2^3 + \dots, \qquad k = d_0 + d_1 2^1 + d_2 2^2 + d_3 2^3 + \dots$$

Pomocou Legendreovej formuly dokážte nasledovné kritérium: číslo $\binom{n}{k}$ je nepárne práve vtedy, keď pre každý index $i \geqq 0$ platí $c_i \geqq d_i$. Potom odvoďte jeho dva dôsledky:

a) Všetky kombinačné čísla $\binom{n}{k}$ s daným n a $k \in \{0, \dots, n\}$ sú nepárne práve vtedy, keď je číslo $n + 1$ mocninou čísla 2.

b) Počet tých kombinačných čísel $\binom{n}{k}$ s daným n a $k \in \{0, \dots, n\}$, ktoré sú nepárne, je mocninou čísla 2 pre každé n.

[Podľa Legendreovej formuly je číslo $\binom{n}{k}$ nepárne práve vtedy, keď vo všetkých všeobecne platných nerovnostiach

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{2^i} \right\rfloor \geqq 0 \quad (i \in \mathbb{N})$$

nastane rovnosť. Po dosadení binárnych zápisov do týchto rovností dostaneme po úprave ekvivalentnú sústavu

$$\left\lfloor \frac{(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)2 + \dots + (c_{i-1} - d_{i-1})2^{i-1}}{2^i} \right\rfloor = 0 \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Tá je zrejme splnená práve vtedy, keď je súčet

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)2 + \dots + (c_i - d_i)2^i$$

nezáporný pre každé $i \geqq 0$, teda práve vtedy, keď sa celý výpočet rozdielu $n - k$ v dvojkovej sústave odohrá v jednotlivých rádoch samostatne. Ďalej uvážte, že takto prebehne odčítanie $n - k$ pre každé k práve vtedy, keď je číslo n zapísané skupinou jednotiek. Pri všeobecnom n je počet rozdielov $n - k$ s takým priebehom výpočtu zrejme rovný 2^j, kde j je počet jednotiek v zápise čísla n.]

---

5. *Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o* 1. *Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov mohli byť na všetkých stenách kocky rovnaké čísla.*

(*Peter Novotný*)

Riešenie. V každom kroku sa súčet všetkých čísel na stenách kocky zväčší o 2, jeho parita sa teda nezmení. Ak sú na všetkých stenách kocky rovnaké čísla, je ich súčet násobkom šiestich, a je teda deliteľný dvoma. Nutnou podmienkou pre to, aby sme tento stav dosiahli, teda je, aby i na začiatku bol súčet všetkých čísel na stenách kocky deliteľný dvoma.

Táto podmienka je súčasne aj postačujúca. Predpokladajme, že súčet všetkých šiestich celých čísel na stenách kocky je na začiatku deliteľný dvoma. Ukážeme, ako po určitom počte krokov dosiahneme, aby na všetkých stenách kocky boli rovnaké čísla.

Označme steny kocky $S_1, S_2, \dots, S_6$, pričom stena S_1 je oproti stene S_6, stena S_2 oproti S_5 a S_3 oproti S_4. (Podobne sú očíslované i steny bežnej hracej kocky: súčet bodov na protiľahlých stenách dáva 7.) Krok, v ktorom zväčšíme čísla na stenách S_i, S_j, označíme k_{ij}. A pretože nás zaujíma len relatívna hodnota očíslovania stien, t. j. či a o koľko sa líšia od najmenšej hodnoty zo všetkých šiestich čísel, budeme ďalej pracovať len s týmito relatívnymi hodnotami (čo budú nezáporné celé čísla s najmenšou hodnotou 0).

Postupnosťou krokov k_{12}, k_{23}, k_{35}, k_{54}, k_{41} zabezpečíme, že sa číslo na každej stene okrem steny S_6 zväčší o 2, čo vzhľadom na náš dohovor vlastne znamená, že sme (relatívnu) hodnotu čísla na stene S_6 o 2 zmenšili. Podobným spôsobom môžeme o 2 „zmenšiť" číslo na ľubovoľnej stene kocky. Je teda zrejmé, že opísaným spôsobom dosiahneme, že (relatívne) hodnoty čísel na stenách budú len 0 alebo 1; nula medzi nimi musí byť aspoň jedna (podľa významu relatívnych hodnôt). Teraz už stačí vyšetriť nasledovné možnosti (pripomeňme, že súčet všetkých šiestich čísel je párny):

a) Na stenách kocky sú samé nuly; tvrdenie potom platí triviálne.
b) Na stenách kocky sú práve dve 1 (na zvyšných stenách 0). Bez ohľadu na to, či sú obe jednotky na susedných alebo protiľahlých stenách, vždy môžeme rozdeliť štyri steny s nulami na dve dvojice susedných stien a v dvoch krokoch zväčšiť ich čísla o 1.
c) Na stenách kocky sú práve štyri 1 (na zvyšných dvoch stenách sú 0). Tento prípad vyriešime tak, že najprv znížime (spôsobom opísaným vyššie) hodnotu každej steny s jednotkou o dve, čím (v relatívnych hodnotách) dostaneme presne situáciu opísanú v b).

Záver. Dosiahnuť, aby po konečnom počte krokov boli na všetkých stenách kocky napísané rovnaké čísla, je možné práve vtedy, keď je súčet čísel na všetkých šiestich stenách kocky deliteľný dvoma.

Poznámka. Časť c) predchádzajúceho riešenia je možné vyriešiť i takto: Ak sú obe 0 na susedných stenách, môžeme ich jediným krokom zväčšiť na 1. Ak sú obe 0 na protiľahlých stenách (bez ujmy na všeobecnosti nech sú to napríklad S_1 a S_6), pomocou krokov k_{12}, k_{36}, k_{15}, k_{46} dosiahneme, že na každej stene kocky bude napísané číslo 2.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Na každej stene kocky je napísané práve jedno číslo, pričom všetky čísla nie sú rovnaké. V jednom kroku čísla na každej stene kocky nahradíme aritmetickým priemerom čísel na všetkých štyroch susedných stenách. Rozhodnite, či po niekoľkých krokoch môžu byť na stenách kocky opäť pôvodné čísla. [Nie. Označme M najväčšie z čísel. Ak M po prvom kroku zo stien zmizne, už sa na nich nikdy neobjaví. Ak nezmizne, bude po prvom kroku na práve dvoch stenách a zmizne po druhom kroku.]

N2. Na tabuli sú napísané celé nezáporné čísla od 0 do 1 234. Uvažujme nasledovnú operáciu: Zmažeme ľubovoľné dve čísla a namiesto nich napíšeme na tabuľu ich rozdiel (od väčšieho čísla odčítame menšie). Túto operáciu opakujeme, kým na tabuli neostane posledné číslo. Môže na tabuli ostať číslo 2? [Nie. Uvedenou operáciou sa nemení parita súčtu všetkých čísel napísaných na tabuli a tento súčet je v našom prípade nepárny.]

N3. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 100. Uvažujme nasledovnú operáciu: Zmažeme ľubovoľné dve čísla a namiesto nich napíšeme na tabuľu ich súčet. Túto operáciu opakujeme, kým na tabuli neostanú posledné tri čísla. Môžeme týmto spôsobom nakoniec získať tri po sebe idúce čísla? [Súčet troch po sebe idúcich čísel je deliteľný tromi, ale nemeniaci sa súčet všetkých čísel na tabuli deliteľný tromi nie je.]

N4. Na stole je n pohárov, všetky sú postavené dnom nahor. V jednom kroku môžeme otočiť ľubovoľných k pohárov naopak (k je dané, nemenné). Je možné, aby po konečnom počte krokov bolo všetkých n pohárov postavených dnom nadol? Riešte najprv pre $n = 9$ a $k = 5$, potom pre $n = 9$ a $k = 4$. [Pre $n = 9$ a $k = 5$ to zrejme možné je. Pre $n = 9$ a $k = 4$ to možné nie je, pretože všeobecnejšie platí: pri párnom k a ľubovoľnom n sa nemení parita počtu pohárov postavených dnom nahor (t. j. tento počet je buď stále párny alebo stále nepárny).]

N5. Je daných n ($n \geqq 2$) prirodzených čísel, s ktorými môžeme vykonať nasledovnú operáciu: vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky, a nahradíme ich ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú začiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké, ak n je a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. [51–B–I–4]

---

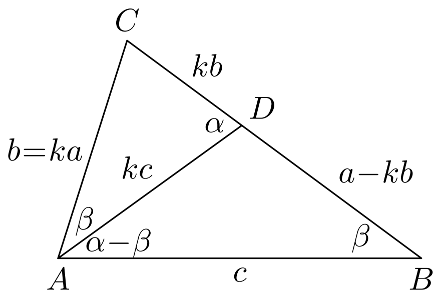
6. *Dokážte, že v každom trojuholníku ABC s ostrým uhlom pri vrchole C (pri zvyčajnom označení dĺžok strán a veľkostí vnútorných uhlov) platí nerovnosť*

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

Riešenie.

Ak $a = b$, je $\alpha = \beta$, takže $\cos(\alpha - \beta) = 1$ a dokazovaná nerovnosť platí ako rovnosť $a^2 + a^2 = 2a^2$ (dodajme, že bez ohľadu na to, či je uhol γ ostrý alebo nie). Keďže dokazovaná nerovnosť je symetrická v a, b (kosínus je párna funkcia), môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a > b$ čiže $\alpha > \beta$.



Obr. 3

Keďže $\alpha > \beta$, môžeme uhol BAC veľkosti α rozdeliť pomocou bodu $D \in BC$ na dva uhly CAD a DAB veľkostí β, a $\alpha - \beta$ (obr. 3). Trojuholník DAC je potom zmenšením trojuholníka ABC s koeficientom podobnosti $k = b : a$, takže $|AD| = bc/a$ a $|DC| = b^2/a$; odtiaľ $|BD| = |BC| - |DC| = (a^2 - b^2)/a$.

Vyjadrenia $|AD|$, $|BD|$ dosadíme do rovnosti z kosínusovej vety pre trojuholník ABD a upravíme:

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos(\alpha - \beta), \\
\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} &= c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bc^2\cos(\alpha - \beta)}{a}, \\
(a^2 - b^2)^2 &= \delta \cdot c^2, \quad \text{kde} \quad \delta = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) > 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(Posledná nerovnosť vyplýva z toho, že pre $\alpha \neq \beta$ je $\cos(\alpha - \beta) < 1$.) Vzťah (1) spolu s rovnosťou $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ teraz využijeme na úpravu rozdielu Δ pravej a ľavej strany dokazovanej nerovnosti, ktorý navyše ešte vynásobíme výrazom $2ab$:

$$\begin{aligned}
2ab\Delta &= 2ab\bigl(2ab - (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta)\bigr) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2) \cdot 2ab\cos(\alpha - \beta) = \\
&= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \delta) = \delta(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 = \\
&= \delta(a^2 + b^2) - \delta \cdot c^2 = \delta(a^2 + b^2 - c^2) = \delta \cdot 2ab\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Po vydelení výrazom $2ab$ dostávame vzťah $\Delta = \delta\cos\gamma$, takže vzhľadom na $\delta > 0$ má výraz Δ rovnaké znamienko ako $\cos\gamma$ (zopakujme, že za predpokladu $\alpha \neq \beta$). Odtiaľ vyplýva, že v prípade, keď $\gamma < 90°$ a $\alpha \neq \beta$, platí nerovnosť zo zadania úlohy ako *ostrá.* Tým je úloha vyriešená a odpoveď na jej záverečnú otázku znie: v dokázanej nerovnosti (v zadanej situácii, t. j. pri ostrom uhle γ) nastane rovnosť práve vtedy, keď $a = b$.

Poznámka 1. Odvodený vzťah $\Delta = \delta \cos\gamma$ sa bez pomocných označení prepíše ako identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) = \big(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta)\big)\cos\gamma, \tag{2}$$

ktorá platí pre *ľubovoľný* trojuholník ABC (k nášmu odvodeniu stačí pridať triviálne overenie rovnosti (2) v prípade $a = b$). Výsledok (2) umožňuje ľahko urobiť diskusiu o jednotlivých prípadoch relácie

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \lesseqqgtr 2ab,$$

lebo prvý činiteľ na pravej strane (2) je vždy nezáporný:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) \geqq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0.$$

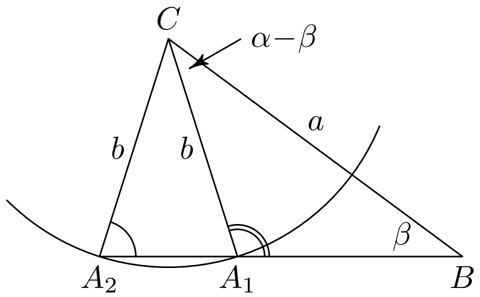
Relácia dopadá takto: rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b$ alebo $\gamma = 90°$; v prípade $a \neq b$ potom platí ostrá nerovnosť $<$ alebo $>$ podľa toho, či je $\gamma < 90°$ alebo $\gamma > 90°$.

Iné riešenie. Pôvodné riešenie je celé založené na vzťahu (1), preto jeho odlišné odvodenie teraz uvedieme ako „iné riešenie“. Tvar kladného výrazu δ v (1) je motiváciou k úvahe o pomocnom trojuholníku, ktorého dve strany majú dĺžky a, b a zvierajú uhol veľkosti $\alpha - \beta$ (opäť predpokladáme, že $a > b$). Nás zaujíma dĺžka jeho tretej strany, ktorú označíme d, takže pre výraz δ vo vzťahu (1), ktorý sa chystáme dokázať, budeme mať $\delta = d^2$. Ukážme, že taký trojuholník so stranami a, b, d je – okrem pôvodného trojuholníka so stranami a, b, c – druhým riešením úlohy *zostrojiť trojuholník ABC, ak sú dané strany a, b a uhol β.* Konštrukciu oboch riešení A_1BC a A_2BC vidíme na obr. 4. Súčet uhlov pri vrcholoch A_1 a A_2 (vyznačených oblúčikmi) je zrejme 180°. V jednom z trojuholníkov je to uhol α, v druhom teda uhol $180° - \alpha$, takže uhol pri vrchole C druhého trojuholníka je práve $\alpha - \beta$, ako sme si želali. (V prípade $\alpha = 90°$ síce platí $A_1 = A_2$, ale na celej našej úvahe netreba nič meniť: v takom prípade totiž $\alpha - \beta = \gamma$ a $c = d$.) Úsečky A_1B, A_2B teda majú (v niektorom poradí) dĺžky c a d. Z mocnosti bodu B k zostrojenej kružnici so stredom C a polomerom b vyplýva rovnosť

$$cd = a^2 - b^2, \tag{3}$$

z ktorej po umocnení na druhú dostávame $c^2d^2 = (a^2 - b^2)^2$. A to je kľúčový vzťah (1) z pôvodného riešenia, lebo, ako už sme naznačili, podľa kosínusovej vety platí

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta). \tag{4}$$



Obr. 4

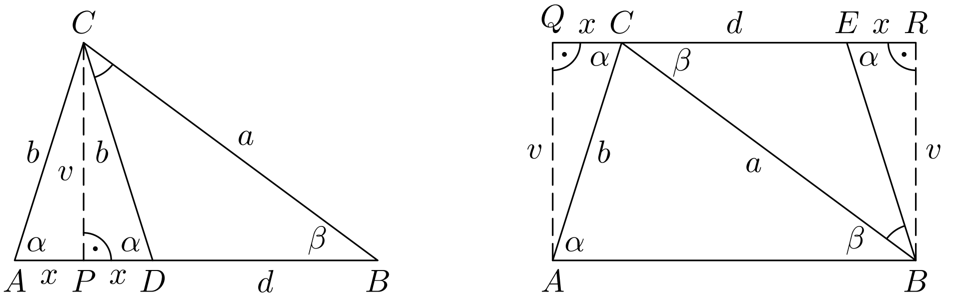
Poznámka 2. V pôvodnom riešení sme zo vzťahu (1) odvodili identitu zapísanú v Poznámke 1 ako (2). Práve uvedený alternatívny dôkaz (1) s využitím konštrukčnej úlohy (a, b, β) má zaujímavý dôsledok: vďaka „rovnoprávnosti" oboch riešení z obr. 4 musí platiť aj identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha - \beta), \tag{5}$$

získaná z (2) výmenou úloh trojuholníkov s trojicami strán (a, b, c) a (a, b, d) a uvedená v doplňujúcej úlohe D1; v jej návode naznačujeme odlišné trigonometrické odvodenie.

Iné riešenie. Pomocný trojuholník so stranami a, b $(a > b)$ zvierajúcimi uhol $\alpha - \beta$ a treťou stranou d danou vzťahom (4) môžeme využiť na riešenie úlohy i bez objavu „mocnosťovej" rovnosti (3) nasledovným postupom, ktorý môže byť blízky riešiteľom, a preto ho opisujeme i v návodnej úlohe N1.

Uvedený trojuholník je možné k trojuholníku ABC vhodne prikresliť dvoma spôsobmi, ktoré vidíme na obr. 5. Vľavo je to trojuholník BCD (ten poznáme už z predchádzajúceho riešenia), vpravo to je trojuholník BCE; ľahko potom overíme,



Obr. 5

že oba vyznačené uhly BCD a CBE majú požadovanú veľkosť $\alpha - \beta$. (Oba obrázky zodpovedajú prípadu $\alpha < 90°$, v úplnom riešení by nemal chýbať obrázok pre prípad $\alpha \geqq 90°$, ktorý tu posudzovať nebudeme, pretože ďalší postup vyžaduje len malú obmenu.) Pomocou dĺžky d zo vzťahu (4) teraz upravíme dokazovanú (ostrú) nerovnosť:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) &< 2ab, \\ (a^2 + b^2)\cdot 2ab\cos(\alpha - \beta) &< 4a^2b^2, \\ (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - d^2) &< 4a^2b^2, \\ (a^2 - b^2)^2 &< (a^2 + b^2)d^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Nakoniec využijeme Pytagorovu vetu pre dvojice pravouhlých trojuholníkov z obr. 5; v oboch variantoch (ako s trojuholníkom BCD, tak s trojuholníkom BCE) potom platí

$$a^2 = (d + x)^2 + v^2 \quad \text{a} \quad b^2 = x^2 + v^2,$$

takže $a^2 - b^2 = d^2 + 2dx = d(d + 2x)$. Po dosadení do ľavej strany nerovnosti (6) a skrátení výrazom d^2 dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$(d + 2x)^2 < a^2 + b^2 \quad \text{čiže} \quad c^2 < a^2 + b^2,$$

ktorá (vďaka kosínusovej vete) presne vyjadruje podmienku $\gamma < 90°$ zo zadania úlohy. Tým je celé jej riešenie hotové, pretože v prípade $a = b$ zrejme v dokazovanej nerovnosti nastane rovnosť.

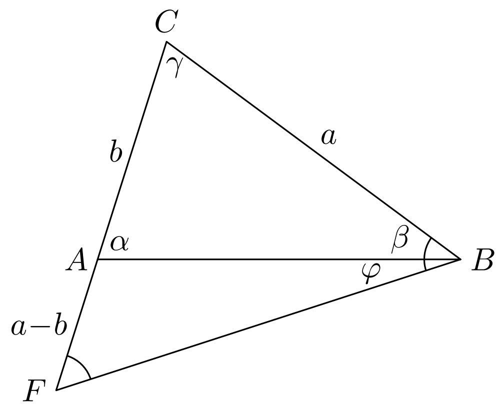
Iné riešenie. Ešte jedným spôsobom za predpokladov $\gamma < 90°$ a $a > b$ (čiže $\alpha > \beta$) dokážeme ostrú nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) < 2ab.$$

Najprv ju ekvivalentne upravíme, keď položíme $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0$ a využijeme vzorec $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(1 - 2\sin^2\varphi) &< 2ab,\\ (a-b)^2 &< 2(a^2+b^2)\sin^2\varphi,\\ 2\cdot\left(\frac{a-b}{2\sin\varphi}\right)^2 &< a^2 + b^2.\end{aligned}$$

To je (podľa sínusovej vety) nerovnosť $2r^2 < a^2 + b^2$ pre polomer r kružnice opísanej ľubovoľnému trojuholníku so stranou $a - b$ a protiľahlým vnútorným uhlom φ. Taký trojuholník dostaneme, keď ako na obr. 6 stranu CA trojuholníka ABC predĺžime za



Obr. 6

bod A do bodu F tak, aby platilo $|CF| = a$ ($a > b$). Potom má trojuholník ABF stranu AF dĺžky $a - b$ s protiľahlým uhlom ABF, ktorého veľkosť určíme takto: rovnoramenný trojuholník BCF má pri základni BF zhodné uhly $90° - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, takže

$$|\measuredangle ABF| = |\measuredangle CBF| - |\measuredangle CBA| = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \varphi.$$

Preto je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABF naozaj rovný skúmanej hodnote r. Pre ňu tak dostaneme z predpokladu $\gamma < 90°$ odhad

$$r = \frac{|AB|}{2\sin|\measuredangle AFB|} = \frac{c}{2\sin(90° - \frac{1}{2}\gamma)} < \frac{c}{2\sin 45°} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

čiže $2r^2 < c^2$; z toho istého predpokladu $\gamma < 90°$ vyplýva (podľa kosínusovej vety pre trojuholník ABC) ďalšia nerovnosť $c^2 < a^2 + b^2$. Dokopy dostávame $2r^2 < c^2 < a^2 + b^2$ a požadovaná nerovnosť $2r^2 < a^2 + b^2$ je tak dokázaná.

Dodajme ešte, že v prípade $\gamma > 90^\circ$ z rovnakých dôvodov platí $2r^2 > c^2 > a^2 + b^2$, čo (za predpokladu $a \neq b$) dokazuje opačnú nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) > 2ab.$$

Iné riešenie. Uvedieme ešte jedno trigonometrické riešenie. Pre ľubovoľný trojuholník ABC platí totiž tzv. *Mollweidov vzorec*

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma},$$

o ktorom pojednáva návodná úloha N2 a z ktorého vyplýva nasledovné vyjadrenie hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 1 - \frac{2(a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{c^2}.$$

Dosadením do ľavej strany dokazovanej nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) &\leqq 2ab, \\
(a^2 + b^2)\left(1 - \frac{2(a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{c^2}\right) &\leqq 2ab, \\
(a-b)^2 &\leqq \frac{2(a^2+b^2)(a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{c^2}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že v prípade $a = b$ nastane rovnosť. V prípade $a \neq b$ po vydelení kladným výrazom $(a-b)^2$ a ďalšej zrejmej ekvivalentnej úprave dostaneme

$$c^2 \leqq 2(a^2 + b^2)\cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Ak sem dosadíme z rovností

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{a} \quad 2\cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \cos\gamma,$$

dostaneme po odčítaní súčtu $a^2 + b^2$ od oboch strán nerovnosť

$$-2ab\cos\gamma \leqq (a^2 + b^2)\cos\gamma \quad \text{čiže} \quad 0 \leqq (a+b)^2\cos\gamma,$$

čo vďaka zadanému predpokladu $\gamma < 90^\circ$ naozaj platí ako ostrá nerovnosť. Tým je nerovnosť zo zadania úlohy dokázaná; rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$. (Aj pri tomto postupe je možné odvodiť všeobecnejšie závery uvedené v Poznámke 1 za prvým riešením.)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Najprv uvážte, ako k danému trojuholníku ABC, v ktorom platí $a > b$ a $\gamma < 90°$, vhodne prikresliť trojuholník s dvoma stranami a, b, ktoré by zvierali uhol $\alpha - \beta$. Označte d dĺžku tretej strany takého trojuholníka a ukážte, že nerovnosť zo zadania súťažnej úlohy je ekvivalentná s nerovnosťou $(a^2 - b^2)^2 \leqq (a^2 + b^2)^2 d^2$. Tú potom dokážte tak, že do ľavej strany dosadíte vyjadrenie prepôn a, b vo vhodných pravouhlých trojuholníkoch pomocou Pytagorovej vety. [Celý postup je podrobne opísaný v treťom riešení súťažnej úlohy.]

N2. Pre všeobecný trojuholník ABC dokážte tzv. Mollweidov vzorec

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma},$$

s pomocou ktorého je možné vyriešiť zadanú súťažnú úlohu. [Mollweidov vzorec je triviálny v prípade $a = b$; v prípade $a > b$ použite sínusovú vetu pre trojuholník ABF, kde F je ten bod ležiaci na predĺžení strany CA za bod A, pre ktorý platí $|AF| = a - b$; prípad $a < b$ sa dá previesť na predchádzajúci zámenou strán a a b. Riešenie súťažnej úlohy pomocou Mollweidovho vzorca je v našom texte uvedené ako posledné.]

D1. Pre všeobecný trojuholník ABC dokážte rovnosť

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2 \cos(\alpha - \beta).$$

[S využitím rovnosti $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma$ sa dá dokazovaný vzorec upraviť na tvar $2ab\sin^2\gamma = c^2\Big(\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\Big)$. Ukážte ďalej, že platí $\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta$, a potom využite, že rovnosť $ab\sin^2\gamma = c^2\sin\alpha\sin\beta$ je dôsledkom sínusovej vety.]

D2. Pre všeobecný trojuholník ABC dokážte druhý Mollweidov vzorec

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma},$$

ktorý spolu s prvým Mollweidovým vzorcom z úlohy N2 vedie k rovnosti

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

označovanej spolu s ďalšími dvoma analogickými rovnosťami pre dvojice strán a, c a b, c ako tangensová veta pre trojuholník ABC. [Použite sínusovú vetu pre trojuholník ABG, kde bod G leží na predĺžení strany BC za bod C tak, že $|BG| = a + b$. Pre odvodenie tangensovej vety porovnajte podiel ľavých a podiel pravých strán oboch Mollweidových vzorcov a k tomu uvážte, že $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma$.]