SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

59. ročník, školský rok 2009/2010

Domáce kolo

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 59. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **23. novembra 2009** (kategória **A**) a do **11. januára 2010** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 59. ročníka v kategórii **A**. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2010 v Kazachstane), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2010 v Českej republike) a na stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2010 na Slovensku).

Termíny 59. ročníka matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	01. 12. 2009	19. 01. 2010	21. – 24. 03. 2010
Kategórie B, C	21. 01. 2010	30. 03. 2010	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA Bratislava v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2009/2010
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:

http://www.olympiady.sk   http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm   http://matematika.okamzite.eu
http://kms.sk/mo   http://www.imo-official.org

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Mgr. Ján Mazák, Bc. Michal Prusák

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

59. ročník Školský rok 2009 / 2010 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-y} &= z-1,\\ \sqrt{y^2-z} &= x-1,\\ \sqrt{z^2-x} &= y-1.\end{aligned}$$

(*Radek Horenský*)

A – I – 2

Do kosoštvorca $ABCD$ je vpísaná kružnica. Uvažujme jej ľubovoľnú dotyčnicu pretínajúcu obe strany BC, CD a označme postupne R, S jej priesečníky s priamkami AB, AD. Dokážte, že hodnota súčinu $|BR|\cdot|DS|$ od voľby dotyčnice nezávisí. (*Leo Boček*)

A – I – 3

Na tabuli sú napísané čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dve čísla, z ktorých jedno je deliteľom druhého, obe zotrieme a na tabuľu napíšeme ich (celočíselný) podiel. Takto pokračujeme, kým na tabuli nezostanú iba čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľom iného. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich číslom 1.) Najmenej koľko čísel môže na tabuli zostať? (*Peter Novotný*)

A – I – 4

V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme O, V a S postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky OV prechádza bodom S práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka ABC má veľkosť $60°$.

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 5

V nádrži je r_0 rýb, spoločný úlovok n rybárov. Prichádzajú pre svoj podiel jednotlivo. Každý si myslí, že sa dostavil ako prvý, a aby si vzal presne n-tinu aktuálneho počtu rýb v nádrži, musí predtým jednu z rýb pustiť späť do mora. Určte najmenšie možné číslo r_0 v závislosti od daného $n \ge 2$, keď aj posledný rybár si aspoň jednu rybu odnesie. (*Dag Hrubý*)

A – I – 6

Pre dané prvočíslo p určte počet (všetkých) usporiadaných trojíc (a,b,c) čísel z množiny $\{1,2,3,\dots,2p^2\}$, ktoré spĺňajú vzťah

$$\frac{[a,c]+[b,c]}{a+b} = \frac{p^2+1}{p^2+2}\cdot c,$$

pričom $[x,y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Na stole ležia tri kôpky zápaliek: v jednej 2 009, v druhej 2 010 a v poslednej 2 011. Hráč, ktorý je na ťahu, zvolí dve kôpky a z každej z nich odoberie po jednej zápalke. V hre sa pravidelne striedajú dvaja hráči. Hra končí, akonáhle niektorá kôpka zmizne. Vyhráva ten hráč, ktorý urobil posledný ťah. Popíšte stratégiu jedného z hráčov, ktorá mu zaručí výhru. (*Ján Mazák*)

B – I – 2

Na tabuli je napísané štvorciferné číslo, ktoré má presne šesť kladných deliteľov, z ktorých práve dva sú jednociferné a práve dva dvojciferné. Väčší z dvojciferných deliteľov je druhou mocninou prirodzeného čísla. Určte všetky čísla, ktoré môžu byť na tabuli napísané. (*Peter Novotný*)

B – I – 3

V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, pre ktorého stredy strán AB, CD, DA označené postupne K, L, M platí: body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Nájdite 2 009 po sebe idúcich štvorciferných čísel, ktorých súčet je súčinom troch po sebe idúcich prirodzených čísel. (*Radek Horenský*)

B – I – 5

Vnútri kratšieho oblúka AB kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC je zvolený bod D. Tetiva CD pretína stranu AB v bode E. Dokážte, že trojuholník so stranami dĺžok $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný s trojuholníkom ABD. (*Pavel Leischner*)

B – I – 6

Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc. (*Jaromír Šimša*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

59. ročník Školský rok 2009 / 2010 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Erika a Klárka hrali hru „slovný logik“ s týmito pravidlami: Hráč A si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč B vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč A mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena A, Á sú rôzne). Keby si hráč A myslel napríklad slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpovie hráč A, že jedno písmeno uhádol hráč B na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „$1 + 2$“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene O vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách K a L, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala $0 + 3$, $0 + 2$, $1 + 2$, $2 + 0$ a $1 + 2$. Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť. (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Vrcholom C pravouholníka $ABCD$ veďte priamky p a q, ktoré majú s daným pravouholníkom spoločný iba bod C, pričom priamka p má od bodu A najväčšiu možnú vzdialenosť a priamka q vymedzuje s priamkami AB, AD trojuholník s čo najmenším obsahom. (*Leo Boček*)

C – I – 3

Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x-2\lfloor x\rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.)
(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Kružnica $k(S; r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T; s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB. (*Leo Boček*)

C – I – 5

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \le \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} \le \frac{a + b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. (*Ján Mazák*)

C – I – 6

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú deliteľné desiatimi a ktoré vo svojom dekadickom zápise majú niekde vedľa seba dve nuly, po ktorých vyškrtnutí sa pôvodné číslo 89-krát zmenší.
(*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

59. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh: doc. RNDr. Leo Boček, CSc., Mgr. Radek Horenský,

RNDr. Dag Hrubý, RNDr. Tomáš Jurík, Mgr. Pavel Leischner, PhD.,

Mgr. Ján Mazák, Mgr. Peter Novotný, PhD.,

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR

Miesto a dátum vydania: Bratislava, september 2009

Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný, PhD.