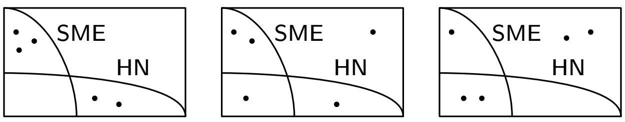
1. *Erika a Klárka hrali hru „slovný logik" s týmito pravidlami: Hráč A si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč B vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč A mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena A, Á sú rôzne). Keby si hráč A myslel napríklad slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpovie hráč A, že jedno písmeno uhádol hráč B na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „*$1+2$*", lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene O vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách K a L, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala* $0+3$, $0+2$, $1+2$, $2+0$ *a* $1+2$. *Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť.*

(Peter Novotný)

Riešenie. Slová ZÁPAL a STRUK nemajú spoločné písmená. Preto sa, ako vyplýva z odpovedí $1+2$ a $0+2$, medzi ich písmenami, ktoré dokopy tvoria množinu $\mathsf{M} = \{\mathrm{Z}, \mathrm{Á}, \mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{L}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{R}, \mathrm{U}, \mathrm{K}\}$, nachádza všetkých päť písmen hľadaného slova. V slove SKOBA majú byť práve tri z hľadaných písmen. Sú to teda písmená S, K, A. (Zvyšné písmená B a O totiž do množiny M nepatria.) V slove CESTA majú byť len dve z hľadaných písmen, a obe na správnej pozícii. Sú to už nájdené S a A, ktoré teda patria na tretie, resp. piate miesto hľadaného slova (a písmeno T môžeme z množiny M „vylúčiť"). Písmeno K nemôže byť ani na prvom, ani na druhom mieste: vyplýva to z odpovedí pre slová KABÁT ($0+3$) a SKOBA ($1+2$). Takže je na štvrtom mieste a ostáva určiť prvé dve písmená. V slove STRUK sú len dve z hľadaných písmen (musia to teda byť S a K), obe na nesprávnych pozíciách. Preto z množiny M „vylúčime" aj písmená R, U (a T, ak sme to doteraz neurobili). Zvyšné dve hľadané písmená potom patria do množiny $\{\mathrm{Z}, \mathrm{Á}, \mathrm{P}, \mathrm{L}\}$. Z podmienok pre slovo KABÁT vyplýva, že jedno z nich je Á. V slove ZÁPAL je práve jedno písmeno na správnej pozícii. Keby to bolo Z, nemali by sme kam uložiť písmeno Á. Takže Á je na druhom mieste a navyše môžeme vylúčiť písmeno Z. Na prvom mieste hľadaného slova môže byť L alebo P. Ľahko sa presvedčíme, že nájdené slová LÁSKA aj PÁSKA vyhovujú všetkým podmienkam úlohy.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Z piatich rodín odoberajú tri rodiny denník SME a dve Hospodárske noviny. Existuje medzi nimi rodina, ktorá neodoberá žiadny z týchto denníkov? [Taká rodina existovať môže, ale nemusí. Niektoré rodiny totiž môžu odoberať oba denníky. Možné situácie znázorňujú diagramy na obr. 1.]



Obr. 1

N2. Erika a Klárka hrali hru „slovný logik". Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová SIRUP a VODKA. Erika v danom poradí odpovedala $0+3$ a $1+1$. Dokážte, že všetky písmená slova, ktoré si Erika myslela, patria do množiny $\mathsf{M} = \{\mathrm{S}, \mathrm{I}, \mathrm{R}, \mathrm{U}, \mathrm{P}\} \cup \{\mathrm{V}, \mathrm{O}, \mathrm{D}, \mathrm{K}, \mathrm{A}\}$. (Poznamenajme, že Erika si mohla myslieť napríklad slovo ISKRA alebo RUSKO.)

N3. Erika a Klárka hrali hru „slovný logik“. Erika si myslela slovo AGÁTY a Klárka vyslovila slová KABÁT a LOPTA. Overte, že Erika musela odpovedať rovnako ako v úlohe N2. Prečo teraz nepatria všetky písmená slova, ktoré si Erika myslela, do množiny $\mathsf{L} = \{\mathrm{K, A, B, Á, T}\} \cup \{\mathrm{L, O, P, T, A}\}$?

N4. Erika a Klárka hrali hru „slovný logik“. Klárka vyslovila slová STROM a MISKA, pričom Erika odpovedala rovnako ako v úlohe N2. Aké slovo si mohla Erika myslieť, ak vieme, že všetky jeho písmená patria do množiny $\mathsf{L} = \{\mathrm{S, T, R, O, M}\} \cup \{\mathrm{M, I, S, K, A}\}$? [Napríklad TRIKO; všetkých vyhovujúcich „slov“ je až 58, väčšina z nich samozrejme nemá žiadny význam.]

D1. Tridsať maturantov jedného gymnázia si podalo prihlášku na ďalšie štúdium na niektorú zo šiestich fakúlt Slovenskej technickej univerzity. Využili možnosť podať viac prihlášok, a tak polovica žiakov podala prihlášku aspoň na tri fakulty. Tretina študentov si podala prihlášku na viac ako tri fakulty. Na fakultu architektúry sa vzhľadom na talentové prijímacie skúšky nehlásil nikto. Dokážte, že na niektorú zo zvyšných piatich fakúlt sa prihlásilo menej ako dvadsať študentov. [50–C–I–5]

D2. Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún? [58–C–I–1]

---

2. *Vrcholom C pravouholníka $ABCD$ veďte priamky p a q, ktoré majú s daným pravouholníkom spoločný iba bod C, pričom priamka p má od bodu A najväčšiu možnú vzdialenosť a priamka q vymedzuje s priamkami AB, AD trojuholník s čo najmenším obsahom.*

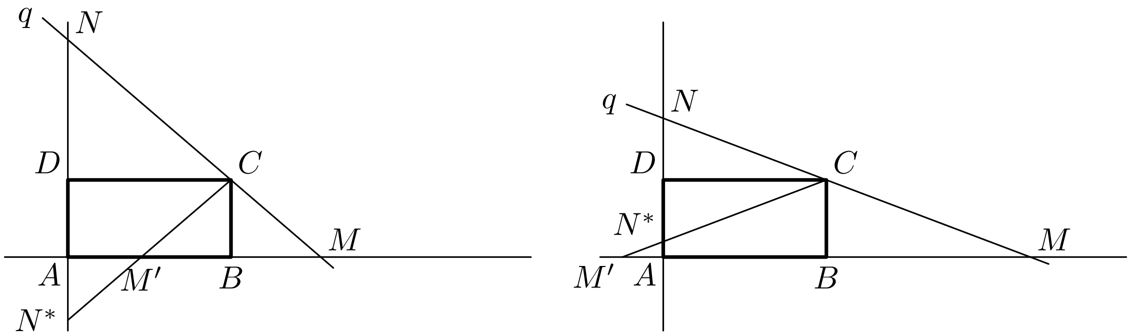
(Leo Boček)

Riešenie. Päta P kolmice z bodu A na priamku p prechádzajúcu bodom C leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AC. Vzdialenosť bodu A od priamky p, t. j. dĺžka úsečky AP, je teda nanajvýš rovná veľkosti priemeru AC. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď je priamka p kolmá na uhlopriečku AC. Je zrejmé, že taká priamka p má s daným pravouholníkom spoločný iba bod C.

Zvoľme teraz ľubovoľnú priamku q tak, aby mala s pravouholníkom $ABCD$ spoločný iba bod C. Jej priesečníky s priamkami AB, AD označme M a N (v uvedenom poradí). Ďalej označme M' obraz bodu M v osovej súmernosti podľa priamky BC a N^* obraz bodu N v osovej súmernosti podľa priamky CD. Keďže $|\measuredangle NCD| + |\measuredangle MCB| = 180° - |\measuredangle BCD| = 90°$, vyplýva z práve uvedených súmerností rovnosť $|\measuredangle MCM'| = 2|\measuredangle MCB| = 2(90° - |\measuredangle NCD|) = 180° - 2|\measuredangle NCD| = 180° - |\measuredangle NCN^*|$. Body C, M' a N^* teda ležia na jednej polpriamke s počiatkom C. Pre obsah trojuholníka AMN tak vždy platí (obr. 2)

$$S_{AMN} = S_{ABCD} + S_{BMC} + S_{DCN} = S_{ABCD} + S_{M'BC} + S_{DN^*C} \geqq 2S_{ABCD},$$

s rovnosťou práve vtedy, keď polpriamka $CM' = CN^*$ bude prechádzať vrcholom A daného pravouholníka, t. j. práve vtedy, keď $M' = A = N^*$ (potom budú BC a CD strednými priečkami trojuholníka AMN).



Obr. 2

Záver. Priamku q, pre ktorú je obsah trojuholníka AMN minimálny, zostrojíme ako priamku CM, pričom M je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa osi BC.

Priamka p s najväčšou možnou vzdialenosťou od bodu A pri daných podmienkach je kolmica na úsečku AC zostrojená v bode C.

Poznámka. K práve uvedenému riešeniu môže žiakov inšpirovať aktivita so skladaním papiera opísaná v úlohe N1. Namiesto skladania papiera možno situáciu modelovať na počítači v niektorom z nástrojov dynamickej geometrie, napríklad v *Cabri geometrii* alebo v *Geonexte.*

Iné riešenie. Označme P pätu kolmice z bodu A na hľadanú priamku p a φ veľkosť odchýlky priamok p a AC. Pre vzdialenosť d priamky p od bodu A platí $d = |AP| = |AC| \sin\varphi \leqq |AC|$. Priamka p má teda najväčšiu možnú vzdialenosť od bodu A práve vtedy, keď je kolmá na AC.

Uvažujme ľubovoľnú priamku q, ktorá má s pravouholníkom $ABCD$ spoločný iba bod C, a budeme hľadať, za akých podmienok ohraničuje spolu s priamkami AB a AD trojuholník s najmenším obsahom. Použijeme označenie z obr. 2a označíme $a = |AB| = |DC|$, $x = |BM|$, $b = |AD| = |BC|$ a $y = |DN|$. Pomocou týchto veličín vyjadríme obsah trojuholníka AMN a odhadneme ho použitím AG-nerovnosti:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab+xy+ay+bx) \geqq \frac{1}{2}\bigl(ab+xy+2\sqrt{ab\cdot xy}\bigr). \qquad (1)$$

Z podobnosti trojuholníkov BMC a DCN dostávame $|DN|/|BC| = |DC|/|BM|$, čo vzhľadom na zvolené označenie dáva $xy = ab$. Po dosadení do (1) a po jednoduchej úprave tak dostaneme $S_{AMN} \geqq 2ab = 2S_{ABCD}$. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď platí $ay = bx$. Spolu s podmienkou $xy = ab$ predstavujú oba vzťahy sústavu rovníc s neznámymi x, y, ktorej vyriešením dostaneme $x = a$ a $y = b$. Dospeli sme teda k rovnakému výsledku ako v prvom riešení, kde sme tiež uviedli konštrukciu priamky q.

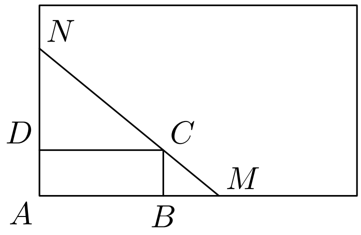
Iné riešenie. Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom riešení s tým rozdielom, že najskôr z podobnosti trojuholníkov BMC a DCN určíme $y = ab/x$ a potom odhadneme obsah trojuholníka AMN pomocou tvrdenia z úlohy N2 za piatou súťažnou úlohou takto:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x)\Bigl(b+\frac{ab}{x}\Bigr) = \\ &= \frac{1}{2}\Bigl(2ab+bx+\frac{a^2b}{x}\Bigr) = ab + \frac{1}{2}ab\Bigl(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\Bigr) \geqq 2ab. \end{aligned}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x/a = a/x$, čo je ekvivalentné s podmienkou $x = a$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na hárok papiera tvaru obdĺžnika narysujte podľa obr. 3 pravouholník $ABCD$ tak,



Obr. 3

aby jeho strany AB a AD splývali s okrajom papiera. Potom zostrojte priamku, aby mala s pravouholníkom spoločný len bod C a jej prienik s hárkom papiera tvoril úsečku MN, pozdĺž ktorej papier rozstrihnite. Vzniknutý papierový model trojuholníka AMN s narysovaným obdĺžnikom $ABCD$ preložte pozdĺž úsečiek BC a DC. Túto činnosť niekoľkokrát opakuje, pritom pre rovnaký pravouholník $ABCD$ voľte rôzne dĺžky úsečky BM. Čo možno z výsledku usúdiť o pomere obsahov trojuholníka AMN a pravouholníka $ABCD$? Hypotézu dokážte.

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b platí $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b$. [Žiakom možno poradiť substitúciu $a = u^2$ a $b = v^2$ alebo $a = m - d$ a $b = m + d$, pričom $m = \frac{1}{2}(a+b)$ a $0 \leqq |d| \leqq \frac{1}{2}m$.]

D1. Daný je ostrý uhol KBL a vnútri neho bod M. Zostrojte bodom M priamku p tak, aby odrezala z uhla KBL trojuholník ABC s najmenším možným obsahom. [Kuřina, F.: Umění vidět v matematice, str. 101]

D2. Daný je ostrý uhol XVY a jeho vnútorný bod C. Zostrojte na ramene VX bod A a na ramene VY bod B tak, aby vzniknutý trojuholník ABC mal čo najmenší obvod. [Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, str. 262]

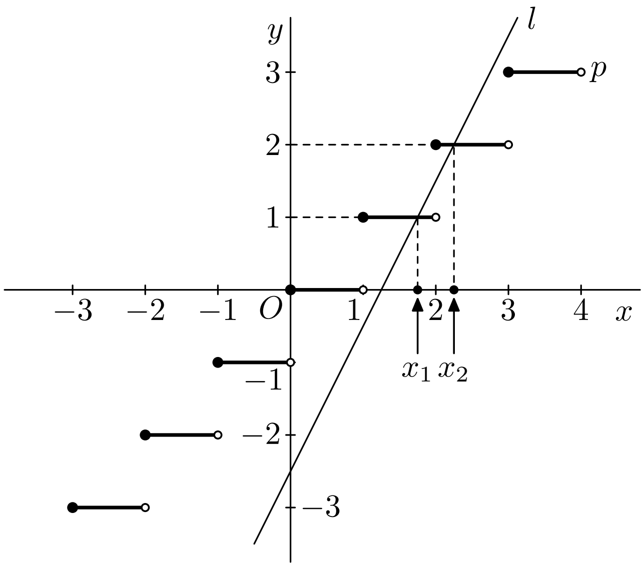
---

3. *Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.)*

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$, a rovnicu $4(a+t) - 2a = 5$ ekvivalentne upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bolo číslo a celé, musí byť $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, pričom k je nepárne číslo. Navyše $2t \in \langle 0, 2)$. Teda buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, alebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Pôvodná rovnica má preto dve riešenia: $x_1 = 2{,}25$ a $x_2 = 1{,}75$.

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Jej riešením sú x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií $l\colon y = 2x - \frac{5}{2}$ a $p\colon y = \lfloor x \rfloor$. Grafy sa pretínajú v dvoch bodoch, ako vidíme na obr. 4. Pre prvý priesečník platí $\lfloor x \rfloor = 1$. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme $4x - 2 = 5$ a odtiaľ $x_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75$. Pre druhý priesečník platí $\lfloor x \rfloor = 2$, takže $4x - 4 = 5$ a $x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$.



Obr. 4

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude spĺňať nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leqq x$, ktoré sú ekvivalentné s podmienkou $\frac{3}{2} < x \leqq \frac{5}{2}$. Pre takéto x zrejme hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ vyplnia interval $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané x nájdeme z rovníc $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte $\lfloor 0 \rfloor$, $\lfloor 3{,}5 \rfloor$, $\lfloor 2{,}1 \rfloor$, $\lfloor -4 \rfloor$, $\lfloor -3{,}9 \rfloor$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor$.

N2. Nech a je celé číslo a $t \in \langle 0, 1)$. Určte $\lfloor a \rfloor$, $\lfloor a + t \rfloor$, $\lfloor a + \frac{1}{2}t \rfloor$, $\lfloor a - t \rfloor$, $\lfloor a + 2t \rfloor$, $\lfloor a - 2t \rfloor$.

N3. V karteziánskej sústave súradníc zostrojte grafy funkcií $f\colon y = \lfloor x \rfloor$, $g\colon y = x - \lfloor x \rfloor$.

D1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu $\lfloor 3x - 5 \rfloor = 5x - 8$. [47–C–S–1]

D2. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, pre ktoré platí $7\lfloor x \rfloor + 2y = 117{,}4$ a $5x + 2\lfloor y \rfloor = 91{,}9$. [47–C–I–5]

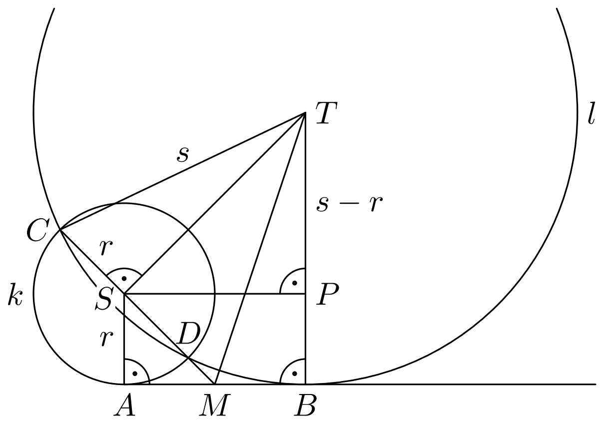
D3. Určte všetky kladné čísla x, pre ktoré je medzi desiatimi číslami $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor 2x \rfloor$, $\lfloor 3x \rfloor$, $\lfloor 4x \rfloor$, $\lfloor 5x \rfloor$, $\lfloor 6x \rfloor$, $\lfloor 7x \rfloor$, $\lfloor 8x \rfloor$, $\lfloor 9x \rfloor$, $\lfloor 10x \rfloor$ práve deväť rôznych. [47–C–II–3]

---

4. *Kružnica $k(S; r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T; s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB.*

(Leo Boček)

Riešenie. Keďže kružnica l má ako tetivu priemer CD kružnice k a dané kružnice nie sú totožné, platí pre ich polomery nerovnosť $s > r$. Ak označíme P pätu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 5), tak z Pytagorovej vety pre pravouhlé trojuholníky



Obr. 5

CST a SPT vyplýva

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s-r)^2. \tag{1}$$

Odtiaľ pre veľkosť úsečky SP vychádza

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s-r)^2 = 2r(s-r).$$

A keďže $ABPS$ je pravouholník, dostávame

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s-r)}.$$

Z pravouhlých trojuholníkov AMS a MTS ďalej podľa prvej rovnosti v (1) vyplýva

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

pritom z pravouhlého trojuholníka MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Preto $|AM| = |BM|$, a bod M je teda stredom úsečky AB.

Poznámka. Záver, že M je stredom úsečky AB, vyplýva okamžite aj z mocnosti bodu M k obom kružniciam (bod M leží na tzv. chordále oboch kružníc). Tieto pojmy sú však pre súťažiacich kategórie C zväčša neznáme a nebudú nutné ani pre riešenia ďalších súťažných kôl.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Kružnice k, l, m sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, l sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia. [55–C–I–2]

N2. Kružnice k, l, m sa dotýkajú spoločnej dotyčnice v troch rôznych bodoch a ich stredy ležia na jednej priamke. Kružnice k a l, a tiež kružnice l a m, majú vonkajší dotyk. Určte polomer kružnice l, ak polomery kružníc k a m sú 3 cm a 12 cm. [55–C–S–3]

D1. Kružnice k, l s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je 72 cm^2. Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB, zatiaľ čo kružnica l sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery kružníc k a l, ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom. [55–C–II–3]

D2. Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1, k_2 s polomerom $r/2$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica l sa zvonka dotýka kružníc k_1, k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a l a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc l a m. [54–B–I–6]

5. *Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí*

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť.

(Ján Mazák)

Riešenie. Pravá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$4(a^2+3ab+b^2) \leqq 5(a+b)^2,$$

ktorú možno ekvivalentne upraviť na nerovnosť $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqq 0$. Tá je splnená vždy a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a=b$.

Z ľavej nerovnosti odstránime zlomky a umocníme ju na druhú,

$$\begin{aligned} 25ab(a^2+2ab+b^2) &\leqq 4\big(a^4+9a^2b^2+b^4+6a^3b+6ab^3+2a^2b^2\big),\\ 25ab(a^2+b^2)+50a^2b^2 &\leqq 4a^4+4b^4+44a^2b^2+24ab(a^2+b^2),\end{aligned}$$

takže po úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$4a^4+4b^4-6a^2b^2 \geqq ab(a^2+b^2).$$

Po odčítaní výrazu $2a^2b^2$ od oboch strán nerovnosti sa nám podarí na oboch stranách použiť úpravu na štvorec. Dostaneme tak (opäť ekvivalentnú) nerovnosť

$$4(a^2-b^2)^2 \geqq ab(a-b)^2.$$

Rozdiel štvorcov v zátvorke na ľavej strane ešte rozložíme na súčin a vzťah upravíme na tvar $4(a-b)^2(a+b)^2 \geqq ab(a-b)^2$.

Ak $a=b$, platí rovnosť. Ak $a \neq b$, môžeme poslednú nerovnosť vydeliť kladným výrazom $(a-b)^2$ a dostaneme tak nerovnosť $4(a+b)^2 \geqq ab$, čiže $4a^2+4b^2+7ab \geqq 0$. Ľavá strana tejto nerovnosti je vždy kladná, preto vyšetrovaná nerovnosť platí pre všetky kladné čísla a, b, pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a=b$.

Iné riešenie. Aritmetický priemer c čísel a, b má tú vlastnosť, že sa od neho obe čísla líšia o rovnakú hodnotu d. Ak nahradíme premenné a, b v daných nerovnostiach premennými c, d, zápis nerovností aj dôkaz oboch vzťahov sa zjednoduší. Položme teda $c=\frac{1}{2}(a+b)$, potom $a=c+d$ a $b=c-d$ (pričom $d=\frac{1}{2}(a-b)$, ako sa ľahko môžeme presvedčiť). Takže $a^2+b^2=2(c^2+d^2)$, $ab=c^2-d^2$, odkiaľ $a^2+3ab+b^2=5c^2-d^2$. Označme ešte písmenami m a n ľavú a pravú stranu prvej z dokazovaných nerovností. Potom

$$m=\sqrt{ab}=\sqrt{c^2-d^2},$$

$$n=\frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)}=\frac{2(5c^2-d^2)}{5\cdot 2c}=c-\frac{d^2}{5c}=\sqrt{\Big(c-\frac{d^2}{5c}\Big)^2}=\sqrt{c^2-d^2\Big(\frac{2}{5}-\frac{d^2}{25c^2}\Big)}.$$

Keďže z vyjadrenia kladnej hodnoty m vidíme, že $d^2 < c^2$, pre výraz v poslednej zátvorke pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geqq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

čo znamená, že výraz pod odmocninou leží v uzavretom intervale medzi číslami $c^2 - d^2$ a c^2. Odtiaľ vyplýva $m \leqq n \leqq c$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $d = 0$, t. j. keď $a = b$.

Poznámka. Z výsledkov súťažnej úlohy vyplýva, že rozdiel medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch kladných čísel možno zdola odhadnúť nezáporným lomeným výrazom takto:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqq \frac{a+b}{2} - \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{10(a+b)}.$$

Umocnením osamostatnenej odmocniny a ďalšími úpravami môžeme dokázať silnejší odhad rovnakého typu

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqq \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

Inú metódu dôkazov spolu s ďalšími podobnými nerovnosťami nájdete v článku J. Šimšu *Dolní odhady rozdílu průměrů* v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální 65 (1986/87), číslo 10, str. 403 – 407.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a + d = b + c$. Dokážte nerovnosť

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqq 0.$$

[54–C–I–1]

N2. Vyriešte najskôr úlohu N2 za druhou súťažnou úlohou a potom dokážte, že pre každé kladné číslo x platí $x + 1/x \geqq 2$. Kedy nastáva rovnosť?

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

D2. Určte všetky kladné čísla x, y, z, pre ktoré súčasne platí

$$x + \frac{1}{y} \leqq 2,\ y + \frac{1}{z} \leqq 2,\ z + \frac{1}{x} \leqq 2.$$

[Sčítajte všetky tri vzťahy a ľavú stranu odhadnite pomocou nerovnosti z úlohy N2.]

6. *Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú deliteľné desiatimi a ktoré vo svojom dekadickom zápise majú niekde vedľa seba dve nuly, po ktorých vyškrtnutí sa pôvodné číslo 89-krát zmenší.*

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Rozoberieme niekoľko prípadov.

a) Predpokladajme najskôr, že nuly sú na treťom a druhom mieste sprava. Hľadané číslo x má potom tvar $x = 1\,000a + b$, pričom a je prirodzené číslo (rovnako to bude aj v ďalších prípadoch, keď už to nebudeme pripomínať) a b nenulová cifra. Podmienku zo zadania $1\,000a + b = 89(10a + b)$ upravíme na tvar $5a = 4b$, z ktorého vyplýva, že b je násobok piatich. Vyhovuje tak iba $b = 5$ a $a = 4$, teda $x = 4\,005$.

b) Ak hľadané číslo x má nuly na štvrtom a treťom mieste sprava, je $x = 10\,000a+b$, pričom b je dvojciferné číslo. Podmienku zo zadania $10\,000a+b = 89(100a+b)$ upravíme na tvar $25a = 2b$, z ktorého vyplýva, že b je nepárny násobok čísla 25 (pripomíname, že x, a teda ani b, nie je deliteľné desiatimi). Odtiaľ $b = 25$, $a = 2$ alebo $b = 75$, $a = 6$, teda $x \in \{20\,025, 60\,075\}$.

c) Ak hľadané číslo x má nuly na piatom a štvrtom mieste sprava, je $x = 100\,000a + b$, pričom b je trojciferné číslo. Podmienku zo zadania $100\,000a + b = 89(1\,000a + b)$ upravíme na tvar $125a = b$, z ktorého vyplýva, že b je nepárny násobok čísla 125. Vyhovuje iba $b = 125$ a $a = 1$, $b = 375$ a $a = 3$, $b = 625$ a $a = 5$, $b = 875$ a $a = 7$, teda $x \in \{100\,125, 300\,375, 500\,625, 700\,875\}$.

d) Z predošlých prípadov vidíme, že pre hľadané číslo x tvaru $x = 10^{n+2}a + b$, pričom b je n-ciferné číslo, dostávame podmienku $10^{n+2}a + b = 89(10^n a + b)$, čiže $11 \cdot 10^n a = 88b$, odkiaľ pre $n \geqq 4$ dostávame podmienku $125 \cdot 10^{n-3}a = b$, podľa ktorej je b násobkom desiatich. Žiadne ďalšie x, ktoré by vyhovovalo zadaniu, teda neexistuje.

Záver. Hľadané čísla sú 4 005, 20 025, 60 075, 100 125, 300 375, 500 625, a 700 875.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Trojciferné číslo sa končí cifrou 4. Ak túto cifru presunieme na prvé miesto (a ostatné dve cifry necháme bez zmeny), dostaneme číslo, ktoré je o 81 menšie ako pôvodné číslo. Určte pôvodné číslo. [Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, str. 7]

N2. Nájdite všetky čísla od 1 do 1 000 000, ktoré sa po škrtnutí prvej cifry 73-krát zmenšia. [45–Z7–I–2]

N3. Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne obrátením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi. [58–C–I–3]

N4. Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať? [57–C–I–6]

D1. Určte najväčšie dvojciferné číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje prirodzené číslo N, z ktorého po škrtnutí prvej číslice zľava dostaneme číslo k-krát menšie. (Po škrtnutí číslice môže zápis čísla začínať jednou či niekoľkými nulami.) K určenému číslu k potom nájdite najmenšie vyhovujúce číslo N. [56–C–II–4]