

1. Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnote  $1/20$  väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu  $1/12$  väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky.

(Jaromír Šimša)

**Riešenie.** Označme  $a/b$  pôvodný zlomok. Podľa zadania platia rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} \quad (a, b \in \mathbb{N}),$$

ktoré sú ekvivalentné so vzťahmi

$$20b(a+1) - 20a(b+1) = b(b+1) \quad \text{a} \quad 12b(a+2) - 12a(b+2) = b(b+2).$$

Tie upravíme na tvar  $19b - 20a = b^2$  a  $22b - 24a = b^2$ . Po odčítaní oboch vzťahov zistíme, že  $4a = 3b$ , čo po dosadení do druhej rovnosti dá  $22b - 18b = b^2$ , čiže  $b^2 = 4b$ . Vzhľadom na podmienku  $b \neq 0$  odtiaľ vyplýva  $b = 4$  a  $a = 3$ .

Hľadané zlomky sú teda  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$  a  $\frac{5}{6}$ .

**Iné riešenie.** Označme  $a/b$  pôvodný zlomok. Zo vzťahov

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

možno odhadnúť, že riešením by mohlo byť  $b = 4$ . Potom

$$\frac{4(a+1) - 5a}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2) - 6a}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

čiže  $a = 3$ . Musíme sa však ešte presvedčiť, že úloha iné riešenie nemá. Podmienky úlohy vedú ku vzťahom

$$\frac{b-a}{b(b+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)} = \frac{2}{4 \cdot 6}.$$

Z podielu ich ľavých a pravých strán potom vyplýva

$$\frac{b+2}{b+1} = \frac{6}{5},$$

čomu vyhovuje jedine  $b = 4$ .

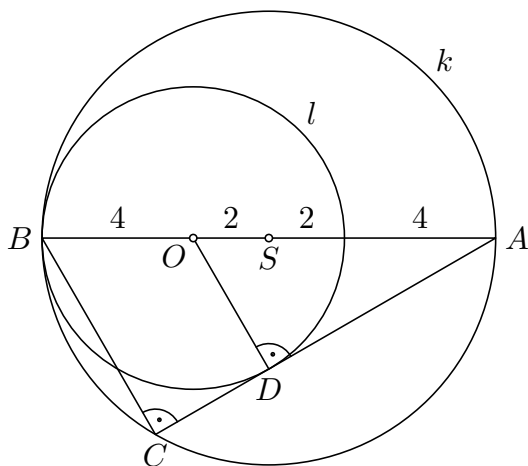
*Poznámka.* V úplnom riešení nesmie chýbať vylúčenie možnosti  $b \neq 4$ . Napríklad z podobných rovností  $1/20 = 30/24 \cdot 25$  a  $1/12 = 52/24 \cdot 26$  by sme mohli hádať, že  $b = 24$ , čo riešením nie je.

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov, z toho najviac 3 body za zostavenie a vhodnú úpravu rovníc (typicky na dve rovnice o dvoch neznámych s odstránenými zlomkami). Ak riešiteľ objaví ako riešenie zlomok  $3/4$ , avšak nezdôvodní, prečo iné riešenie neexistuje, dajte iba 1 bod, prípadne 2 body, ak sa riešiteľ o nejaké algebraické zdôvodnenie pokúsi.

2. Kružnice  $k(S; 6 \text{ cm})$  a  $l(O; 4 \text{ cm})$  majú vnútorný dotyk v bode  $B$ . Určte dĺžky strán trojuholníka  $ABC$ , pričom bod  $A$  je priesečník priamky  $OB$  s kružnicou  $k$  a bod  $C$  je priesečník kružnice  $k$  s dotyčnicou z bodu  $A$  ku kružnici  $l$ .

(Pavel Leischner)

**Riešenie.** Bod dotyku kružnice  $l$  s dotyčnicou z bodu  $A$  označme  $D$  (obr. 1). Z vlastností dotyčnice ku kružnici vyplýva, že uhol  $ADO$  je pravý. Zároveň je pravý aj uhol



Obr. 1

$ACB$  (Tálesova veta). Trojuholníky  $ABC$  a  $AOD$  sú tak podobné podľa vety  $uu$ , lebo sa zhodujú v uhloch  $ACB$ ,  $ADO$  a v spoločnom uhle pri vrchole  $A$ . Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \quad (1)$$

Zo zadaných číselných hodnôt vychádza  $|OD| = |OB| = 4 \text{ cm}$ ,  $|OS| = |SB| - |OB| = 2 \text{ cm}$ ,  $|OA| = |OS| + |SA| = 8 \text{ cm}$  a  $|AB| = 12 \text{ cm}$ . Podľa (1) je teda  $|BC| : 4 \text{ cm} = 12 : 8$  a odtiaľ  $|BC| = 6 \text{ cm}$ . Z Pytagorovej vety pre trojuholník  $ABC$  nakoniec zistíme, že  $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2} \text{ cm} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ .

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov. Z toho 2 body za obrázok a zdôvodnenie pravých uhlov, 2 body za zdôvodnenie podobnosti trojuholníkov a zostavenie potrebnej rovnice, 2 body za dopočítanie dĺžok strán  $BC$  a  $AC$ .

3. Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel  $a, b$ , pre ktoré platí

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

(Ján Mazák)

**Riešenie.** Rovnicu prepíšeme na tvar  $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$ , z ktorého po využití vzťahu pre rozdiel štvorcov a následnom vyňatí výrazu  $b - a$  dostaneme  $2 = (b - a)(a + b - 1)$ . Keďže 2 je prvočíslo, máme pre uvedený súčin nasledujúce štyri možnosti:

a)  $b - a = 1$  a  $a + b - 1 = 2$ , potom  $a = 1$  a  $b = 2$ .

b)  $b - a = 2$  a  $a + b - 1 = 1$ , potom  $a = 0$  a  $b = 2$ .

c)  $b - a = -1$  a  $a + b - 1 = -2$ . Druhú rovnicu možno prepísať na tvar  $a + b = -1$ , z ktorého vidíme, že rovnosť nenastane pre žiadnu dvojicu nezáporných celých čísel.

d)  $b - a = -2$  a  $a + b - 1 = -1$ . Druhú rovnicu možno prepísať na tvar  $a + b = 0$ , z ktorého vidíme, že vyhovuje jediná dvojica nezáporných celých čísel  $a = b = 0$ , ktorá však nevyhovuje prvej rovnici.

*Záver.* Úloha má dve riešenia: Buď  $a = 1$  a  $b = 2$ , alebo  $a = 0$  a  $b = 2$ .

*Poznámka.* Namiesto rozboru štyroch možností môžeme začať úvahou, že nulové čísla  $a, b$  nie sú riešením úlohy, takže  $a + b - 1 \geq 0$ , a teda aj  $b - a \geq 0$ . Stačí teda uvažovať iba možnosti a) a b).

**Iné riešenie.** Rovnicu upravíme na tvar  $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$ , resp. na tvar  $2 = b(b - 1) - a(a - 1)$ . Z nasledujúcej tabuľky a tvaru čísel  $x^2 - x = x(x - 1)$  je zrejmé, že rozdiely medzi susednými hodnotami výrazov  $x(x - 1)$  rastú s rastúcim  $x$  (ľahko sa o tom presvedčíme výpočtom:  $(x + 1)x - x(x - 1) = 2x$ ).

$x$	0	1	2	3	4	5	...
$x(x - 1)$	0	0	2	6	12	20	...

Môže teda platiť iba  $b^2 - b = 2$  a  $a^2 - a = 0$ . Odtiaľ  $a \in \{0, 1\}$  a  $b = 2$ . Riešením úlohy sú teda dve dvojice nezáporných celých čísel:  $a = 0, b = 2$  a  $a = 1, b = 2$ .

Za úplné a správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov, z toho jeden bod za vhodnú úpravu rovnice. V prípade prvého riešenia strhnite po jednom bode pri vynechaní niektorej zo situácií a), b) a 1 bod, ak riešiteľ nevyhlási možnosti c), d).

*Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.*

*Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.*