1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\sqrt{x^2-y}=z-1,$$
$$\sqrt{y^2-z}=x-1,$$
$$\sqrt{z^2-x}=y-1.$$

(Radek Horenský)

Riešenie. Ľavé strany daných rovníc majú (ako odmocniny) nezáporné hodnoty, preto z pravých strán vyplývajú postupne nerovnosti $z \geqq 1$, $x \geqq 1$ a $y \geqq 1$.

Odmocnín v rovniciach sa zbavíme ich umocnením:

$$x^2-y=(z-1)^2, \quad y^2-z=(x-1)^2, \quad z^2-x=(y-1)^2,$$

umocnené rovnice sčítame a výsledok sčítania upravíme:

$$(x^2-y)+(y^2-z)+(z^2-x)=(z-1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2,$$
$$(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)=(z^2+x^2+y^2)-2(z+x+y)+3,$$
$$x+y+z=3.$$

Keďže však z nerovností $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ a $z \geqq 1$ vyplýva sčítaním $x+y+z \geqq 3$, môže byť rovnosť $x+y+z=3$ splnená jedine tak, že $x=y=z=1$. Skúškou dosadením sa presvedčíme, že trojica $(x,y,z)=(1,1,1)$ je naozaj riešením (jediným, ako vyplýva z nášho postupu).

Dodajme, že ak si nerovnosti $x,y,z \geqq 1$ na začiatku nevšimneme, avšak vzťah $x+y+z=3$ po sčítaní umocnených rovníc odvodíme, môžeme potom určenú hodnotu súčtu $x+y+z$ použiť pri sčítaní pôvodných (neumocnených) rovníc, a tak získať rovnicu $\sqrt{x^2-y}+\sqrt{y^2-z}+\sqrt{z^2-x}=0$ s jasným dôsledkom: každá z odmocnín musí byť rovná nule.

Iné riešenie. Keďže pre trojice (x,y,z), (y,z,x) a (z,x,y) vyjde sústava zadaných rovníc narovnako, stačí hľadať len také riešenia (x,y,z), v ktorých je prvá zložka maximálna, t. j. platí $x \geqq y$ a $x \geqq z$.[1] Rovnako ako v pôvodnom riešení si uvedomíme, že $x,y,z \geqq 1$ (ďalej nám bude stačiť iba fakt[2], že $x,y,z \geqq 0$).

Z predpokladanej nerovnosti $x \geqq z$ vyplýva pre pravé strany prvej a druhej nerovnice porovnanie $x-1 \geqq z-1$, takže rovnakú nerovnosť musia spĺňať aj odmocniny na ľavých stranách, teda aj príslušné výrazy pod odmocninami: $y^2-z \geqq x^2-y$, čiže $x^2-y^2 \leqq y-z$. Ľavá strana tej poslednej je nezáporná (vďaka predpokladu $x \geqq y$), takže je taká aj pravá strana: $y-z \geqq 0$, čiže $y \geqq z$. To ešte upravíme na nerovnosť $y-1 \geqq z-1$ medzi pravými stranami prvej a tretej rovnice, takže podľa ich ľavých strán dostaneme $z^2-x \geqq x^2-y$, čiže $z^2-x^2 \geqq x-y$. Odtiaľ a z predpokladu $x \geqq y$ máme $z^2-x^2 \geqq 0$, čiže $z \geqq x$. Spolu tak platí $x \geqq y \geqq z \geqq x$, teda musí byť $x=y=z$. Vtedy sa zadaná sústava redukuje na jedinú rovnicu $\sqrt{x^2-1}=x-1$. Je ľahké ukázať, že jej jediné riešenie v obore reálnych čísel je $x=1$.

[1] Nerovnosť $y \geqq z$ dopredu zaručiť nemôžeme. Poradie neznámych x, y, z totiž nemôžeme meniť ľubovoľne, ale iba cyklicky.

[2] Budeme ho potrebovať kvôli ekvivalenciám typu $a^2 \geqq b^2 \Leftrightarrow a \geqq b$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Riešte $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}+\sqrt{x-9}+\sqrt{x-10}=6$ v obore reálnych čísel. [Ľavá strana má zmysel jedine vtedy, keď $x \geqq 10$. Jej hodnota pre $x>10$ je väčšia ako $\sqrt{10-1}+ +\sqrt{10-6}+\sqrt{10-9}=6$, takže $x=10$ je jediné riešenie.]

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x^2-y}=y-1, \qquad \sqrt{y^2-x}=x-1.$$

[Z rovníc vyplýva $x, y \geqq 1$. Ďalej využite buď to, že po sčítaní umocnených rovníc dostanete $x+y=2$, alebo vzhľadom na symetriu predpokladajte $x \geqq y$ a z nerovnosti $y^2-x \geqq x^2-y$ odvoďte $y \geqq x$. Jediné riešenie je $x=y=1$.]

D1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2-y=z^2, \quad y^2-z=x^2, \quad z^2-x=y^2. \quad [57\text{–A–S–1}]$$

D2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2+2yz=6(y+z-2), \; y^2+2zx=6(z+x-2), \; z^2+2xy=6(x+y-2). \; [53\text{–A–S–3}]$$

D3. Zistite, pre ktoré $p \in \mathbb{R}$ má sústava rovníc

$$x^2+1=(p+1)x+py-z, \quad y^2+1=(p+1)y+pz-x, \quad z^2+1=(p+1)z+px-y$$

práve jedno riešenie v obore reálnych čísel. [51–A–S–3]

D4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2-1=p(y+z), \quad y^2-1=p(z+x), \quad z^2-1=p(x+y).$$

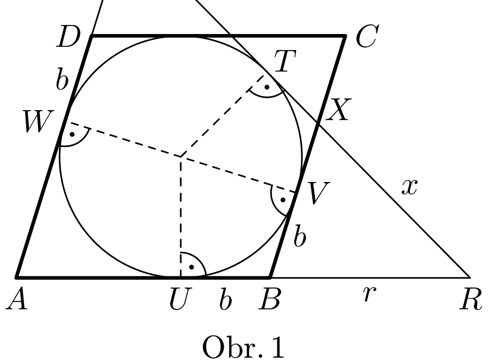
s neznámymi x, y, z a parametrom p. [51–A–II–4]

---

2. *Do kosoštvorca $ABCD$ je vpísaná kružnica. Uvažujme jej ľubovoľnú dotyčnicu pretínajúcu obe strany BC, CD a označme postupne R, S jej priesečníky s priamkami AB, AD. Dokážte, že hodnota súčinu $|BR| \cdot |DS|$ od voľby dotyčnice nezávisí.*

(Leo Boček)

Riešenie. Nech U, V, W, T sú body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami AB, BC, DA a s uvažovanou dotyčnicou RS, ktorej priesečník so stranou BC pomenujme X (obr. 1). Označme $a=|AB|=|AD|$, $b=|BU|=|BV|=|DW|$ pevné dĺžky a $r=|BR|$, $s=|DS|$ premenné dĺžky závislé od voľby dotyčnice RS. Naším cieľom je ukázať, že zadaný súčin $|BR| \cdot |DS|$ $(=r \cdot s)$ má stálu hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 1

Trojuholníky ARS, BRX sú rovnoľahlé podľa stredu R, lebo ich strany AS a BX ležia na rovnobežných priamkach. Navyše kružnica vpísaná prvému trojuholníku ARS je pripísaná strane BX druhého trojuholníka BRX. Podľa poznatku zo záveru návodnej úlohy N2 o tom, že body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice sú súmerne združené podľa stredu strany, na ktorej oba body ležia, môžeme usúdiť, že pomeru $|SW| : |AR|$ v trojuholníku ARS zodpovedá pomer $|BV| : |BR|$ v trojuholníku BRX. To vedie na rovnosť, ktorú pri zavedenom označení zapíšeme ako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkiaľ} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tým je dôkaz hotový a úloha vyriešená.

Iné riešenie. Použijeme rovnaké označenie ako v prvom riešení. Zaobídeme sa bez výsledku úlohy N2 tak, že označíme ešte $|RX| = x$ a vyjadríme dĺžky strán oboch rovnoľahlých trojuholníkov ARS, BRX na základe triviálneho poznatku o rovnosti úsekov dotyčníc z daného bodu k danej kružnici (úloha N1). Pre trojuholník ARS je to ľahké: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojuholníku BRX máme $|BR| = r$ a dĺžku tretej strany BX vyjadríme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pre strany podobných trojuholníkov ARS a BRX teda platí pomer

$$(a + r) : (2b + r + s) : (a + s) = r : x : (2b + r - x).$$

Odtiaľ môžeme eliminovať x a potom objaviť závislosť $rs = ab$. Namiesto takého postupu si však všimnime, že obvod druhého trojuholníka nezávisí od x, preto porovnáme pomery obvodu k prvej strane (od x nezávislej) v každom z oboch trojuholníkov:

$$\begin{aligned} \frac{(a + r) + (2b + r + s) + (a + s)}{a + r} &= \frac{r + x + (2b + r - x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b + s)}{a + r} &= 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs &= ab. \end{aligned}$$

Potrebná rovnosť je dokázaná.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte rovnosť $|AT_1| = |AT_2|$, pričom T_1, T_2 sú body dotyku oboch dotyčníc vedených z bodu A k danej kružnici. [Využite osovú súmernosť alebo zhodnosť trojuholníkov AT_1S a AT_2S (pričom S je stred danej kružnice) podľa vety Ssu.]

N2. Vyjadrite dĺžky všetkých úsekov, na ktoré sú strany daného trojuholníka rozdelené
a) tromi bodmi dotyku kružnice vpísanej,
b) tromi bodmi dotyku kružníc pripísaných,
pomocou dĺžok a, b, c celých (t. j. nerozdelených) strán. Z výsledku potom vypozorujte, že na každej strane trojuholníka tvoria bod dotyku z a) a bod dotyku z b) dvojicu

bodov, ktoré sú súmerne združené podľa stredu príslušnej strany. [Ako úseky z časti a), tak úseky z časti b) majú dĺžky $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$, $\frac{1}{2}(c+a-b)$. Vyplýva to zo sústav lineárnych rovníc, ktoré zostavíte na základe poznatku z úlohy N1, použitom vždy na dotyčnice zo všetkých troch vrcholov trojuholníka k danej (vpísanej či jednej pripísanej) kružnici.]

N3. Kružnica vpísaná dotyčnicovému lichobežníku $ABCD$ sa dotýka základní AB, CD postupne v bodoch E, F. Dokážte rovnosť $|AE|\cdot|DF| = |BE|\cdot|CF|$. [Základne AB a CD určujú spolu s priesečníkom predĺžených ramien BC, AD dva rovnoľahlé trojuholníky, pritom kružnica vpísaná väčšiemu z nich je pripísaná základni menšieho trojuholníka. Z poznatkov z úlohy N2 a úmernosti dĺžok strán oboch trojuholníkov už vyplýva rovnosť pomerov $|AE| : |BE|$ a $|CF| : |DF|$.]

D1. Do jedného konvexného uhla sú vpísané dve nepretínajúce sa kružnice. Ich spoločná vnútorná dotyčnica s bodmi dotyku K, L pretína ramená uhla v bodoch A, B. Dokážte rovnosť $|AK| = |BL|$. [Dôsledok N2 – uvážte vzťah oboch kružníc k trojuholníku ABV, pričom V je vrchol daného uhla. Alebo priamo: Nech úsečka AB je rozdelená bodmi K, L na úseky postupne dĺžok x, y, z. Použitím N1 odvoďte, že vzdialenosti bodov dotyku oboch kružníc na jednotlivých ramenách sú $2x + y$, resp. $2z + y$. Z N1 však vyplýva $2x + y = 2z + y$, t. j. $x = z$.]

D2. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Na jeho výške CD je zvolený bod P tak, že kružnice vpísané trojuholníku ABP a štvoruholníku $PECF$ sú zhodné; pritom bod E je priesečník priamky AP so stranou BC a F priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že aj kružnice vpísané trojuholníkom ADP a BCP sú zhodné. [49–A–III–2]

---

3. *Na tabuli sú napísané čísla* 1, 2, ..., 33. *V jednom kroku zvolíme na tabuli dve čísla, z ktorých jedno je deliteľom druhého, obe zotrieme a na tabuľu napíšeme ich (celočíselný) podiel. Takto pokračujeme, kým na tabuli nezostanú iba čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľom iného. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich číslom* 1.*) Najmenej koľko čísel môže na tabuli zostať?*

(Peter Novotný)

Riešenie. Na tabuli zrejme budú stále len čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budú napísané stále, a to každé jedenkrát, pretože nemajú žiadneho deliteľa rôzneho od 1 a množina M ani neobsahuje žiadny ich násobok (takže nikdy nemôžu z tabule zmiznúť, ani sa objaviť v ďalšom exemplári).

Vysvetlíme teraz, prečo na tabuli budú okrem uvedených piatich prvočísel napísané vždy ešte niektoré dve ďalšie čísla. Súčin S všetkých čísel zapísaných na tabuli je na začiatku rovný

$$S = 33! = 2^{31}\cdot 3^{15}\cdot 5^{7}\cdot 7^{4}\cdot 11^{3}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31. \tag{1}$$

V každom kroku zvolíme nejakú dvojicu čísel (x, y) s vlastnosťou $x \mid y$, teda čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme ich jedným číslom $y/x = k$. Súčin všetkých čísel na tabuli sa pritom zmení z doterajšej hodnoty S na novú hodnotu S/a^2, lebo dva činitele x, y so súčinom $xy = ka^2$ budú nahradené jedným novým činiteľom k (a ostatné činitele sa nezmenia). Je jasné, že pri zmene $S \to S/a^2$ sa exponent ľubovoľného prvočísla p z rozkladu čísla S buď zachová (ak $p \nmid a$), alebo zmenší o párne číslo (rovné exponentu p v rozklade čísla a^2). V žiadnom prípade sa teda nezmení *parita* (párna-nepárna) exponentu žiadneho z prvočísel. Preto každé z prvočísel, ktoré malo na začiatku v rozklade (1) *nepárny* exponent, bude mať nepárny exponent v rozklade meniaceho sa S aj po ľubovoľnom počte krokov. Také sú (okrem 17, 19, 23, 29 a 31) aj prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budú stále zastúpené (nie nutne štyri rôzne) čísla, ktoré sú týmito jednotlivými štyrmi prvočíslami deliteľné. Samozrejme, nemôže to byť iba jediné číslo (lebo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musia byť aspoň dve čísla, napríklad 10 a 33 (alebo 11 a 30 alebo 15 a 22, iné možnosti pri celkovom počte siedmich čísel na tabuli neexistujú). Tak sme dokázali, že na tabuli bude naozaj vždy napísaných najmenej 7 čísel.

Ostáva popísať nejakú postupnosť krokov, po ktorej na tabuli naozaj 7 čísel zostane. Existuje veľa možností, môžeme napríklad dať „bokom“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a so zvyšnými číslami urobiť nasledujúce kroky:

$$32,16 \to 2, \quad 30,15 \to 2, \quad 28,14 \to 2, \quad 26,13 \to 2, \quad 24,12 \to 2, \quad 22,11 \to 2,$$
$$27,9 \to 3, \quad 21,7 \to 3, \quad 18,6 \to 3, \quad 25,5 \to 5, \quad 20,4 \to 5, \quad 8,2 \to 4,$$
$$5,5 \to 1, \quad 4,2 \to 2, \quad 3,3 \to 1, \quad 3,3 \to 1, \quad 2,2 \to 1, \quad 2,2 \to 1, \quad 2,2 \to 1.$$

Po týchto krokoch už je na tabuli (okrem siedmich čísel bokom) len 7 jednotiek, ktoré všetky odstránime šiestimi krokmi $1,1 \to 1$ a posledným krokom napr. $10,1 \to 10$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte, koľkými nulami končí dekadický zápis čísla 33!. [Siedmimi nulami. Stačí zistiť, s akými exponentmi vystupujú prvočísla 2 a 5 v rozklade daného faktoriálu na súčin prvočísel. Dá sa to urobiť konkrétnym rozborom súčinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33$, alebo využiť známy vzťah: exponent prvočísla p v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je rovný súčtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots,$$

pričom $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x a sčítanie prebieha, pokiaľ mocnina p^k v menovateli zlomku neprevyšuje čitateľ n. Celý rozklad čísla 33! je uvedný v riešení súťažnej úlohy.]

N2. Dokážte, že číslo $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$ nie je druhou mocninou celého čísla, a potom nájdite jeho najväčší deliteľ, ktorý je druhou mocninou celého čísla. [Číslo N nie je druhou mocninou, pretože v jeho rozklade na súčin prvočísel vystupuje prvočíslo 47 s nepárnym exponentom 3. Z vyjadrenia $N = (46!)^4 \cdot 47 \cdot (47 \cdot 48) \cdot (47 \cdot 48 \cdot 49) = (46!)^4 \cdot$ $\cdot\, 47^3 \cdot (48^2) \cdot 7^2$ vyplýva, že najväčšou druhou mocninou, ktorá je deliteľom čísla N, je číslo $(46!)^4 \cdot 47^2 \cdot 48^2 \cdot 7^2 = N/47$.]

N3. Nájdite najmenšie celé kladné n, pre ktoré existuje poradie $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ čísel $1, 2, \dots, 10$, ktoré vyhovuje rovnici

$$\frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_6x_7x_8x_9x_{10}} = \frac{1}{n}.$$

[Hľadané n je rovné 7. Keďže $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, nedá sa zlomok na ľavej strane rovnice krátiť číslom 7, takže musí byť $n \geqq 7$. Hodnote $n = 7$ zodpovedá napríklad platná rovnosť $\frac{1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot10}{2\cdot5\cdot7\cdot8\cdot9} = \frac{1}{7}$.]

N4. Na tabuli je napísaných sedem čísel p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2 a q^3, pričom p a q sú dve rôzne prvočísla. Po šiestich krokoch opísaných v súťažnej úlohe zostalo na tabuli jediné číslo. Určte ho bez rozboru všetkých možných postupov, akými možno jednotlivé kroky voliť. [Posledné číslo na tabuli bude pq. Súčin všetkých čísel na tabuli je na začiatku p^9q^9, a preto po každom kroku bude mať hodnotu p^mq^n s nepárnymi exponentmi m a n, ako je vysvetlené v riešení súťažnej úlohy. Pre číslo p^mq^n, ktoré ako jediné ostane nakoniec, navyše musí platiť $m + n \leqq 3$ (ako pre každé číslo, ktoré dostaneme v priebehu vykonávania krokov), takže musí byť $m = n = 1$. Možný postup krokov: $p^3, p^2 \to p$; $q^3, q^2 \to q$; $p^2q, p \to pq$; $pq^2, q \to pq$; $pq, pq \to 1$; $pq, 1 \to pq$.]

D1. V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť: a) na 8 kôpok po 251 minciach, b) na 251 kôpok po 8 minciach. [58–A–I–5]

D2. V každom z vrcholov pravidelného n-uholníka $A_1A_2\dots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole A_k je to práve k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude vo vrchole A_k ležať $n+1-k$ mincí. [58–A–III–5]

D3. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré možno dostať doplnením zátvoriek do výrazu

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

[48–A–I–1]

D4. Do čitateľa aj menovateľa zlomku

$$\frac{29 : 28 : 27 : 26 : 25 : 24 : 23 : 22 : 21 : 20 : 19 : 18 : 17 : 16}{15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2}$$

môžeme opakovane vpisovať zátvorky, a to vždy na rovnaké miesta pod seba.

a) Určte najmenšiu možnú celočíselnú hodnotu výsledného výrazu.

b) Nájdite všetky možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu. [48–A–III–1]

---

4. *V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme O, V a S postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky OV prechádza bodom S práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka ABC má veľkosť* $60°$.

(Tomáš Jurík)

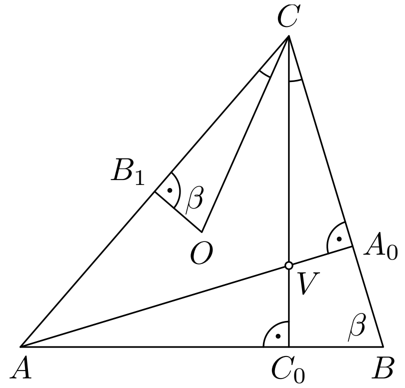
Riešenie. Najskôr ukážeme, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC platí

$$\gamma = 60° \iff |CO| = |CV|. \tag{1}$$

Na to potrebujeme trojuholníky CVA_0 a COB_1, pričom A_0 je päta výšky z vrcholu A a B_1 je stred strany AC (obr. 2). Z pravouhlého trojuholníka ACA_0 vyplýva

$$\gamma = 60° \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Posledné je rovnosť dĺžok odvesien pravouhlých trojuholníkov CVA_0 a COB_1, ktorých vyznačené vnútorné uhly VCA_0 a OCB_1 majú zhodnú veľkosť $90° - \beta$. (Pre uhol CVA_0 to vyplýva z pravouhlého trojuholníka BCC_0, pričom C_0 je päta výšky z vrcholu C na stranu AB, pre uhol OCB_1 to vyplýva z rovnoramenného trojuholníka ACO, ktorý má pri hlavnom vrchole O uhol 2β vďaka vete o obvodovom a stredovom uhle v opísanej kružnici.) Preto je zhodnosť odvesien CA_0, CB_1 ekvivalentná so zhodnosťou prepôn CO a CV, čo dokazuje (1).



Obr. 2

Teraz zapojíme do úvah stred S kružnice vpísanej. Zo spomenutej zhodnosti uhlov VCA_0 a OCB_1 vyplýva, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC je polpriamka CS nielen osou uhla ACB, ale aj osou uhla OCV. Táto os je v prípade $\gamma = 60°$, kedy ako vieme $|CO| = |CV|$, osou základne OV rovnoramenného trojuholníka OVC (body O a V sú rôzne, lebo podľa zadania úlohy je trojuholník ABC rôznostranný), takže stred S naozaj leží na osi úsečky OV. Rovnako to platí aj v prípadoch $\alpha = 60°$, resp. $\beta = 60°$.

Pripusťme teraz, že stred S leží na osi úsečky OV, avšak žiadny z uhlov α, β, γ nie je $60°$. Podľa (1) teda platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Pozrime sa znovu na trojuholník OVC, v ktorom teda os CS vnútorného uhla OCV nesplýva s osou protiľahlej strany OV, takže ich jediný spoločný bod S leží na kružnici trojuholníku OVC opísanej (tento známy fakt uvádzame v úlohe N2). Inak povedané, bod C leží na kružnici opísanej trojuholníku OVS. Z rovnakých dôvodov na tejto kružnici ležia aj body A a B, takže sa jedná o kružnicu opísanú trojuholníku ABC, ktorá však nikdy svojím stredom O neprechádza. Tak sme dostali spor, ktorý ukazuje, že pripustená situácia nemôže nastať. Tým je riešenie celej úlohy ukončené.

Poznámka 1. Z druhej časti riešenia vyplýva tento poznatok: ak má uhol γ (ostrouhlého) trojuholníka ABC veľkosť $60°$, ležia vrcholy A a B na jednej kružnici s priesečníkom výšok, stredom opísanej kružnice aj stredom vpísanej kružnice. Jednoduchšie zdôvodnenie uvádzame v úlohe N1.

Poznámka 2. Kľúčovú ekvivalenciu (1) z podaného riešenia možno dokázať aj trigonometricky. Platia totiž vzťahy

$$|CO| = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{2}$$

podľa ktorých sú úsečky CO a CV zhodné práve vtedy, keď je uhol γ riešením rovnice $2\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma$, ktorá je zrejme ekvivalentná s rovnicou $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, ktorá má na intervale $(0°, 90°)$ jediné riešenie $\gamma = 60°$. Prvý zo vzťahov (2) vyplýva z tzv. rozšírenej sínusovej vety

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

pričom r je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, druhým vzťahom v (2) sa zaoberáme pri úlohe D1.

Poznámka 3. Ekvivalenciu (1) z uvedeného riešenia môžeme dokázať aj bez veľkého počítania: priesečník výšok daného trojuholníka totiž vždy leží na kružnici súmerne združenej s kružnicou trojuholníku opísanou podľa priamky AB (v našom prípade). Vzhľadom na to, že taká kružnica je zároveň obrazom kružnice opísanej v posunutí o vektor CV, závisí dĺžka $|CV|$ v danej opísanej kružnici len od veľkosti tetivy AB (či zodpovedajúceho obvodového uhla), a nie od polohy bodu C. Preto rovnosť $|CV| = r = |CO|$ nastane práve vtedy, keď spomenutá združená kružnica prechádza stredom O kružnice trojuholníku opísanej, t. j. práve vtedy, keď príslušná strana leží oproti (obvodovému) uhlu veľkosti $60°$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Dokážte, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC (pri označení O, S, V zo súťažnej úlohy) platí $|\measuredangle AOB| = 2\gamma$, $|\measuredangle ASB| = 90° + \gamma/2$, $|\measuredangle AVB| = 180° - \gamma$. Aký dôsledok majú tieto rovnosti v prípade $\gamma = 60°$? [Prvá rovnosť je vzťahom obvodového a stredového uhla, pre druhú, resp. tretiu rovnosť si uvedomte, že v trojuholníku ASB, resp. AVB majú dva vnútorné uhly veľkosti $\alpha/2$ a $\beta/2$, resp. $90° - \alpha$ a $90° - \beta$, a v oboch prípadoch dopočítajte tretí uhol. Keďže body O, S, V ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AB, v prípade $\gamma = 60°$ zo zhodnosti uhlov AOB, ASB, AVB (všetky tri sú $120°$) vyplýva, že body A, B, O, S, V ležia na jednej kružnici.]

N2. Dokážte, že ak strany KM a LM daného trojuholníka KLM nie sú zhodné, pretne os vnútorného uhla KML os strany KL v bode, ktorý leží na kružnici, ktorá je trojuholníku KLM opísaná. [Jednoduchšie je dokázať všeobecnejšie tvrdenie, že os vnútorného uhla pretne opísanú kružnicu v bode, ktorý má rovnakú vzdialenosť od zostávajúcich dvoch vrcholov trojuholníka. Zo zhodnosti dvoch obvodových uhlov v kružnici totiž vyplýva zhodnosť príslušných tetív.]

N3. V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte množinu ťažísk všetkých ostrouhlých trojuholníkov ABC, pre ktoré platí: Vrcholy A a B, priesečník výšok V a stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležia na jednej kružnici. [A–55–III–4]

D1. Dokážte, že pre vzdialenosti priesečníka V výšok od vrcholov ostrouhlého trojuholníka ABC platia vzťahy

$$|AV| = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad |BV| = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}, \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

[Ak sú AA_0, CC_0 výšky ostrouhlého trojuholníka ABC a V ich priesečník, platí $|CA_0| = b\cos\gamma$. Pravouhlý trojuholník CA_0V má pri vrchole C uhol $90° - \beta$, takže $|CA_0| = |CV|\cos(90° - \beta) = |CV|\sin\beta$. Porovnaním dostaneme $b\cos\gamma = |CV|\sin\beta$, čo spolu s rovnosťou $b/\sin\beta = c/\sin\gamma$ (sínusová veta) dáva $|CV| = (b/\sin\beta)\cdot\cos\gamma = (c/\sin\gamma)\cdot\cos\gamma = c/\operatorname{tg}\gamma$. Tretí zo vzťahov je dokázaný, prvé dva platia vďaka symetrii.]

---

5. *V nádrži je r_0 rýb, spoločný úlovok n rybárov. Prichádzajú pre svoj podiel jednotlivo. Každý si myslí, že sa dostavil ako prvý, a aby si vzal presne n-tinu aktuálneho počtu rýb v nádrži, musí predtým jednu z rýb pustiť späť do mora. Určte najmenšie možné číslo r_0 v závislosti od daného $n \geqq 2$, keď aj posledný rybár si aspoň jednu rybu odnesie.*

(Dag Hrubý)

Riešenie. Pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ označme r_k počet rýb v nádrži potom, ako si k-ty rybár odnesie svoj podiel. Tieto počty sú podľa zadania určené počiatočnou hodnotou r_0 a rekurentnými vzťahmi

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Zapíšme ich vo výhodnom tvare

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{pričom} \quad q = \frac{n-1}{n} \quad \text{a} \quad d = \frac{1-n}{n}. \tag{1}$$

Rekurentná rovnica $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ ($q, d =$ konšt.) sa vyskytuje v mnohých aplikáciách. Odvodíme preto najskôr, aké priame vyjadrenie má každý člen r_k takej postupnosti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ pri všeobecných q, d a danej počiatočnej hodnote r_0. Až potom sa vrátime k našej úlohe a do výsledku dosadíme hodnoty q, d z (1).

Najprv si všimnime, že v prípade $q = 1$ dostávame rovnicu $r_{k+1} = r_k + d$, podľa ktorej je skúmaná postupnosť aritmetická s diferenciou d, takže jej všeobecný člen má vyjadrenie $r_k = r_0 + kd$. V prípade $q \neq 1$ z rekurentnej rovnice postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
&r_1 = qr_0 + d,\\
&r_2 = qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2 r_0 + (q+1)d,\\
&r_3 = qr_2 + d = q(q^2 r_0 + (q+1)d) + d = q^3 r_0 + (q^2 + q + 1)d,\\
&r_4 = qr_3 + d = q(q^3 r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4 r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Takto nachádzame vyjadrenie

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \cdots + q + 1)d.$$

Ak použijeme známy vzorec pre súčet k členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q \neq 1$, dôjdeme k záveru, že pre každé $k \geqq 0$ je člen r_k daný priamym vzťahom

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q - 1} = q^k\Big(r_0 + \frac{d}{q-1}\Big) - \frac{d}{q-1}.$$

V našom konkrétnom prípade platí

$$\frac{d}{q-1} = \frac{(1-n)/n}{(n-1)/n - 1} = n - 1,$$

odkiaľ nachádzame vyjadrenie jednotlivých hodnôt r_k v tvare

$$r_k = \frac{(n-1)^k (r_0 + n - 1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, n).$$

Vzhľadom na nesúdeliteľnosť dvojice čísel $(n-1)^k$, n^k sú také hodnoty r_k celočíselné práve vtedy, keď je číslo $r_0 + n - 1$ deliteľné všetkými zastúpenými mocninami n^k, z ktorých najvyššia je mocnina n^n. Hľadaná nutná aj postačujúca podmienka má preto tvar: pre niektoré celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$, čiže $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocou tohto parametra j potom majú všetky členy r_k vyjadrenie

$$r_k = j \cdot (n-1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, n). \tag{2}$$

Ostáva nájsť najmenšie celé $j \geqq 1$, pri ktorom sú všetky čísla r_k dané vzťahmi (2) kladné. Keďže tieto čísla zrejme tvoria klesajúcu postupnosť, najmenšie z nich je číslo $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čo je pri $n \geqq 3$ číslo kladné už pri $j = 1$ (teda $r_0 = n^n - n + 1$), zatiaľ čo pri $n = 2$ to platí až pri $j = 2$ (vtedy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpoveď. Hľadaný najmenší počet rýb je $r_0 = 7$ pre $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pre každé $n \geqq 3$.

Iné riešenie. Postupnosť $r_0, r_1, \ldots, r_n$ môžeme počítať aj „odzadu“, t. j. pomocou posledného člena r_n vyjadrovať predošlé členy. S využitím rekurentného vzťahu

$$r_k = qr_{k+1} + 1, \quad \text{pričom} \quad q = \frac{n}{n-1},$$

(kvocient q má teraz prevrátenú hodnotu oproti hodnote v prvom riešení), postupne pre $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ dostávame

$$\begin{aligned}
r_{n-1} &= qr_n + 1,\\
r_{n-2} &= qr_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1,\\
r_{n-3} &= qr_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1,\\
r_{n-4} &= qr_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1,\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Podobne ako v prvom riešení (sčítanie členov geometrickej postupnosti a následné dosadenie kvocientu q teraz vynecháme) tak dôjdeme ku vzťahom

$$r_{n-k} = \frac{n^k (r_n + n - 1)}{(n-1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \tag{3}$$

Keďže čísla n^k a $(n-1)^k$ sú nesúdeliteľné, hodnoty r_{n-k} sú všetky celočíselné práve vtedy, keď $(n-1)^n \mid r_n + n - 1$, čiže $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čomu zodpovedá (podľa (3) pre $k = n$) počiatočná hodnota $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak sme odvodili rovnaký záver ako pri prvom postupe.

Poznámka. Nájdenie vzťahov pre členy r_k sa pri oboch postupoch veľmi zjednoduší, keď si všimneme, že zmenená postupnosť tvorená číslami $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická. Na túto možnosť riešenia rekurentných rovníc (1) upozorňujeme v úlohe N2.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite vzorec pre všeobecný člen postupnosti zadanej rekurentne:

a) $x_0 = 2$, $x_{k+1} = 2x_k - 3$,

b) $x_0 = \frac{1}{6}$, $x_{k+1} = 4x_k + 1$,

c) $x_0 = 2$, $x_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot (4 - x_k)$.

[Jedná sa o rovnice tvaru $x_{k+1} = qx_k + d$, takže ich môžeme riešiť metódou opísanou v riešení súťažnej úlohy. Výsledky: a) $x_k = 3 - 2^k$, b) $x_k = \frac{1}{2} \cdot 4^k - \frac{1}{3}$, c) $x_k = \left(-\frac{1}{3}\right)^k + 1$.]

N2. Príklady z N1 riešte odlišným postupom: ukážte, že rovnicu $x_{k+1} = qx_k + d$ možno v prípade $q \neq 1$ upraviť na tvar $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ s vhodnou konštantou c. Akonáhle také c nájdete, dostanete geometrickú postupnosť čísel $x_k - c$, pre ktorú okamžite vychádza $x_k - c = q^k(x_0 - c)$, čiže $x_k = c + q^k(x_0 - c)$. [Upravené rovnice sú a) $x_{k+1} - 3 = 2(x_k - 3)$, b) $x_{k+1} + \frac{1}{3} = 4(x_k + \frac{1}{3})$, c) $x_{k+1} - 1 = -\frac{1}{3}(x_k - 1)$. Všeobecne sú rovnice $x_{k+1} = qx_k + d$ a $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ ekvivalentné práve vtedy, keď platí $d = c - qc$, t. j. vyhovujúce c má tvar $c = d/(1-q)$.]

D1. Keď k číslu x_0 pripočítame 2 a výsledok vydelíme tromi, dostaneme číslo x_1. Podobne z čísla x_1 dostaneme číslo x_2, z čísla x_2 číslo x_3 atď. Pre dané n určte všetky tie celé čísla x_0, pre ktoré sú celé aj všetky čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. [Podľa rekurentnej rovnice $x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_k + 2)$ prepísanej metódou z úlohy N2 na tvar $x_{k+1} - 1 = \frac{1}{3}(x_k - 1)$ majú čísla x_k všeobecné vyjadrenie $x_k = 1 + (x_0 - 1)/3^k$. Všetky čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ (pri danom n) sú teda celé práve vtedy, keď je číslo $x_0 - 1$ celým násobkom každej z mocnín $3^0, 3^1, \dots, 3^n$, t. j. práve vtedy, keď $x_0 = j \cdot 3^n + 1$ pre niektoré celé j.]

6. *Pre dané prvočíslo p určte počet (všetkých) usporiadaných trojíc (a,b,c) čísel z množiny $\{1,2,3,\dots,2p^2\}$, ktoré spĺňajú vzťah*

$$\frac{[a,c]+[b,c]}{a+b}=\frac{p^2+1}{p^2+2}\cdot c,$$

pričom $[x,y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x a y.

(Tomáš Jurík)

Riešenie. V zadanej rovnici bude výhodné prejsť od najmenších spoločných násobkov k najväčším spoločným deliteľom, a to pomocou známeho vzťahu $(x,y)\cdot[x,y]=x\cdot y$ (poz. úlohu N3). Označme preto $u=(a,c)$, $v=(b,c)$ a ľavú stranu rovnice prepíšme takto:

$$\frac{[a,c]+[b,c]}{a+b}=\frac{ac/u+bc/v}{a+b}=\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}\right)\cdot\frac{c}{a+b}.$$

Zadaná rovnica sa preto (po vynásobení zlomkom $(a+b)/c$) dá zapísať v ekvivalentnom tvare

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}=\frac{p^2+1}{p^2+2}\cdot(a+b). \tag{1}$$

Porovnajme odhady veľkosti výrazov v (1). Keďže $p^2>0$, pre zlomok na pravej strane (1) zrejme platí

$$\frac{1}{2}<\frac{p^2+1}{p^2+2}<1,$$

takže podľa (1) musí byť

$$\frac{a+b}{2}<\frac{a}{u}+\frac{b}{v}<a+b. \tag{2}$$

Vďaka ľavej nerovnosti nemôžu byť obe prirodzené čísla u, v väčšie ako 1, lebo z nerovností $u\geqq 2$ a $v\geqq 2$ by sme dostali

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}\leqq\frac{a+b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je teda rovné 1. Pravá nerovnosť v (2) však vylučuje prípad $u=v=1$. Číslu 1 sa preto rovná práve jedno z čísel u, v. Vzhľadom na symetriu rozoberieme iba prípad $u=1$ a $v\geqq 2$.

Keďže číslo v sme zaviedli vzťahom $v=(b,c)$, je zlomok b/v rovný niektorému prirodzenému číslu b_1. Dosadíme teraz hodnoty $u=1$ a $b=b_1v$ do (1) a vzniknutú rovnicu vyriešime vzhľadom na premennú a:

$$\begin{aligned} a+b_1&=\frac{p^2+1}{p^2+2}\cdot(a+b_1v),\\ (p^2+2)(a+b_1)&=(p^2+1)(a+b_1v),\\ a&=b_1((p^2+1)v-p^2-2). \end{aligned}\tag{3}$$

Keby platilo $v\geqq 3$, dostali by sme z poslednej rovnosti odhad

$$a\geqq(p^2+1)v-p^2-2\geqq 3(p^2+1)-p^2-2=2p^2+1,$$

a to je v spore s nerovnosťou $a \leqq 2p^2$ danou oborom, v ktorom podľa zadania úlohy majú hodnoty a, b, c ležať. Platí teda opačná nerovnosť $v < 3$, ktorá spolu s predpokladom $v \geqq 2$ vedie k záveru, že nutne $v = 2$. Rovnica (3) tak prechádza na rovnicu

$$a = b_1(2(p^2 + 1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

ktorú na zadanom obore hodnôt a, množine $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, ľahko vyriešime.

Máme $a \leqq 2p^2$, odkiaľ $b_1 \leqq 2$. Pritom z podmienok $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ vyplýva, že c je párne číslo s číslom a nesúdeliteľné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak vyplýva, že $b_1 = 1$ a p je *nepárne* prvočíslo. Takže $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pre číslo c to znamená nasledujúce spresnenie: *c je párne číslo, ktoré nie je násobkom daného prvočísla p.*

Ktoré $c \in \{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$ takú podmienku spĺňajú a koľko ich je? Ako už vieme, pre $p = 2$ žiadne také c neexistuje. Pre nepárne p zo všetkých p^2 možných párnych čísel $c = 2, 4, 6, \dots, 2p^2$ vylúčime všetky násobky čísla p, teda práve p čísel $2p, 4p, \dots, 2p^2$; vyhovujúcich hodnôt je preto práve $p^2 - p$. Taký je teda počet všetkých hľadaných trojíc $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozoberanom prípade, keď $u = 1$ a $v \geqq 2$. V druhom možnom prípade, keď naopak $v = 1$ a $u \geqq 2$, existuje vzhľadom na symetriu rovnaký počet $p^2 - p$ vyhovujúcich trojíc, ktoré majú teraz všetky tvar $(2, p^2, c)$. Popis vyhovujúcich trojíc zahrnieme aj do odpovede, aj keď to zadanie úlohy nevyžaduje.

Odpoveď. V prípade $p = 2$ žiadne vyhovujúce trojice neexistujú, v prípade nepárneho prvočísla p ich je práve $2(p^2 - p)$ a všetky majú tvar

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{alebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

pričom $c \in \{1, 2, \dots, 2p^2\}$ je ľubovoľné párne číslo, ktoré nie je násobkom p.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b, c platí $[a, c] + [b, c] = (a + b)c$. [Sú to práve tie trojice, v ktorých je číslo c nesúdeliteľné ako s číslom a, tak s číslom b. Sčítaním zrejmých nerovností $[a, c] \leqq ac$ a $[b, c] \leqq bc$ dostaneme $[a, c] + [b, c] \leqq (a + b)c$, pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď $[a, c] = ac$ a $[b, c] = bc$.]

N2. Určte, koľko (usporiadaných) dvojíc prirodzených čísel a, b spĺňa rovnicu
a) $[a, 70] + [b, 70] = 210$, b) $\frac{1}{[a,30]} + \frac{1}{[b,30]} = \frac{1}{30}$.
[a) 64 dvojíc, b) 16 dvojíc. a): Súčet $[a, 70] + [b, 70]$ dvoch násobkov čísla 70 musí mať tvar $70 + 140$ alebo $140 + 70$. Jedno z čísel $[a, 70]$, $[b, 70]$ je teda 70, druhé je 140. Rovnicu $[x, 70] = 70$ spĺňajú práve tie x, ktoré sú deliteľmi čísla $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ (je ich 8), riešeniami rovnice $[y, 70] = 140$ sú práve čísla $y = 4d$, pričom d je deliteľ čísla $35 = 5 \cdot 7$ (sú teda 4). Preto má pôvodná rovnica $2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$ riešení. b): Menovatele oboch zlomkov z ľavej strany rovnice sú násobky 30, žiadny sa však nemôže rovnať číslu 30, ako vyplýva z porovnania s pravou stranou rovnice. Musí teda platiť $[a, 30] \geqq 60$ a $[b, 30] \geqq 60$, odkiaľ $\frac{1}{[a,30]} + \frac{1}{[b,30]} \leqq \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $[a, 30] = [b, 30] = 60$, čiže $a = 4m$ a $b = 4n$, pričom m, n sú delitele čísla $15 = 3 \cdot 5$. Tie sú štyri, takže všetkých dvojíc a, b je $4^2 = 16$.]

N3. Dokážte, že najväčší spoločný deliteľ (x, y) a najmenší spoločný násobok $[x, y]$ ľubovoľných prirodzených čísel x a y spĺňajú rovnosť $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. [Využite rovnosť $\min\{u, v\} + \max\{u, v\} = u + v$ pre exponenty u, v každého prvočísla v rozkladoch čísel x a y na súčin prvočísel.]

D1. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí $[a, b] + (a, b) = a + b$. [Vyhovujú práve tie dvojice čísel a, b, pre ktoré platí $a \mid b$ alebo $b \mid a$. Označme $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$, $[a, b] = uvd$ a daný vzťah má tvar $uvd + d = d(u + v)$, čiže $uv + 1 = u + v$, čo možno upraviť na $(u - 1)(v - 1) = 0$. To platí práve vtedy, keď je aspoň jedno z čísel u, v rovné 1, teda práve vtedy, keď $d = a$ alebo $d = b$. Inak povedané, jedno z čísel a, b je deliteľom druhého čísla.]

D2. Rozhodnite, či súčet niektorých dvoch prirodzených čísel je deliteľom ich najmenšieho spoločného násobku. [Nie. Pripusťme, že pre niektoré prirodzené a, b, k platí $[a, b] = k(a+b)$. Označme $d = (a, b)$, potom $a = ud$, $b = vd$ a $[a, b] = uvd$, pričom $(u, v) = 1$. Po dosadení do rovnice dostaneme $uvd = k(ud + vd)$, čiže $uv = k(u + v)$. Z rovnosti $ku = v(u - k)$ vyplýva $v \mid ku$, teda $v \mid k$ (lebo $(u, v) = 1$). Podobne sa odvodí vzťah $u \mid k$. Z $v \mid k$ a $u \mid k$ (opäť vzhľadom na $(u, v) = 1$) vyplýva $uv \mid k$, odkiaľ $uv \leqq k$, čo protirečí rovnosti $uv = k(u + v)$, podľa ktorej $uv \geqq k(1 + 1) = 2k$.]

D3. V obore prirodzených čísel riešte rovnicu $x^2+y^2 = 13[x, y]$. [Jedinými dvoma riešeniami sú dvojice $(12, 18)$ a $(18, 12)$. Označme $d = (x, y)$, potom $x = ud$, $y = vd$ a $[x, y] = uvd$, pričom $(u, v) = 1$. Po dosadení do rovnice dostaneme $(u^2 + v^2)d^2 = 13uvd$, čiže $(u^2 + v^2)d = 13uv$. Odtiaľ $u \mid v^2d$ a $v \mid u^2d$, takže vzhľadom na $(u, v) = 1$ máme $u \mid d$ a $v \mid d$, teda aj $uv \mid d$. Preto $d = kuv$ pre vhodné celé k. Dosadením do rovnice $(u^2 + v^2)d = 13uv$ dostaneme $(u^2 + v^2)kuv = 13uv$, čiže $(u^2 + v^2)k = 13$. Jediným deliteľom čísla 13 tvaru $u^2 + v^2$ je samo číslo $13 = 2^2 + 3^2$, takže $\{u, v\} = \{2, 3\}$ a $k = 1$, odkiaľ $d = kuv = 6$ a $\{x, y\} = \{ud, vd\} = \{12, 18\}$.]