MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Komentáre a riešenia úloh domáceho kola pre
žiakov základných škôl
a nižších ročníkov osemročných gymnázií

Kategórie Z4, Z5, Z9

Školský rok 2008/2009

KATEGÓRIA Z4

Z4-I-1

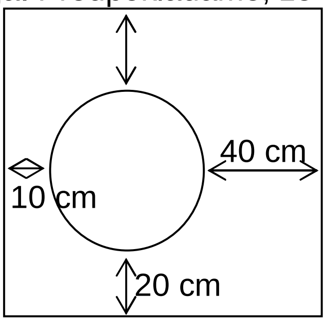
Na stole so štvorcovou doskou o strane 1 m bola „trochu nakrivo“ umiestnená kruhová dečka. Od najbližšej strany dosky stola bol jej kraj vzdialený 10 cm, od susednej strany potom 20 cm a od najvzdialenejšej strany 40 cm.

a) Ako ďaleko bol okraj dečky od štvrtej strany dosky stola?
b) Aký polomer mala dečka?

S. Bednářová

Riešenie:

Najdôležitejšia je myšlienka „rozprestretia“ dečky na stôl a uvedomenia si, čo je vzdialenosť od okraja. Predpokladáme, že si žiaci nakreslia nasledujúci obrázok:



Dĺžka hrany stola je 100 cm. Vo vodorovnom smere máme rozmery 10 cm, 40 cm a priemer dečky. Preto priemer dečky bude $100-10-40=50\ [\mathrm{cm}]$. Vo zvislom smere máme na obrázku 20 cm, priemer dečky a neznámy rozmer. Z obrázka vyjadria, že posledný neznámy rozmer musí byť 30 cm. $100-20-50=30\ [\mathrm{cm}]$.

Od štvrtej strany stola je dečka vzdialená 30 cm.

Z4-I-2

Jožo Nudilsa sa zabával tým, že písal za sebou postupne prirodzené čísla. Začal jednotkou: 1234567891011... Po čase ho to prestalo baviť a kriticky sa pozrel na svoj výtvor. Zistil, že v postupnosti číslic, ktoré napísal, sa vyskytujú iba raz tri päťky priamo za sebou.

a) Najmenej koľko za sebou idúcich prirodzených čísel napísal Jožo?
b) Najmenej koľko číslic napísal Jožo?

S. Bednářová

Riešenie:

Päťky za sebou sú v čísle 55, 555 a pod. Ak napíšeme číslo 55 a hneď za ním 56, dostaneme 3 päťky za sebou. Skôr sa 3 päťky nevyskytovali, lebo päťka sa (pred 55) vyskytuje v číslach: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54. Tieto čísla pripisovaním za predchodcu a dopisovaním nasledujúceho čísla počet pätiek priamo za sebou nezväčšia. Takže Fero mohol skončiť už číslom 56.

a) Jožo napísal najmenej 56 čísel.
b) Jožo napísal najmenej $9+(56-9)\cdot 2=9+47\cdot 2=103$ číslic.

Poznámka: Ak žiak napíše, že Jožo posledné číslo nenapísal celé – z čísla 56 napísal iba päťku, takže napísal najmenej 102 číslic, uznajte riešenie ako správne.

Z4-I-3

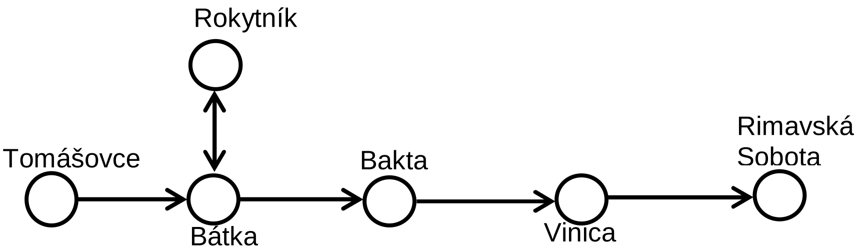
Bývam v Tomášovciach, ale pracujem v Rimavskej Sobote. Autobus, ktorým do práce cestujem, má nasledujúce zastávky (v uvedenom poradí): Tomášovce, Bátka, Rokytník, Bátka, Bakta, Vinica, Rimavská Sobota.

Z Bátky do Rimavskej Soboty cez Baktu a Vinicu je to po ceste asi 11 km, z Rokytníka cez Bátku a Baktu do Vinice 12 km, z Bátky cez Baktu do Vinice 9 km. Z Tomášoviec do Bátky je to rovnako ďaleko ako z Vinice do Rimavskej Soboty.

a) Koľko km prejde autobus z Tomášoviec do Rimavskej Soboty touto trasou?
b) Koľko km by to bolo z Tomášoviec do Rimavskej Soboty, keby autobus nezachádzal do Rokytníka?

S. Bednářová

Riešenie:

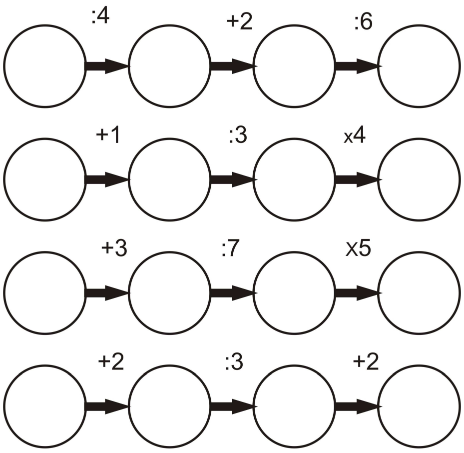


Na obrázku je schéma cesty autobusu. Z Rokytníka do Vinice je 12 km, ale z Bátky do Vinice 9 km. Preto je z Rokytníka do Bátky 3 km. Z Bátky do Rimavskej Soboty je 11 km ale z Bátky do Vinice iba 9 km, preto z Vinice do Rimavskej Soboty je 2 km a z Tomášoviec do Bátky tiež 2 km.

a) Z Tomášoviec do Rimavskej Soboty potom bude: $2+3+3+9+2=19$ (km)
b) Keby autobus nezachádzal do Rokytníka bola by cesta o 6 km kratšia, mala by teda 13 km.

Z4-I-4

Doplň do prázdnych políčok prirodzené čísla od 1 do 16 (každé číslo môžeš použiť len raz) tak, aby platili matematické vzťahy.



M. Smitková

Riešenie:

Z čísel od 1 do 16 sa 4 dajú deliť 4, 8, 12, 16. Teda prvé číslo **v prvom riadku** môže byť len jedno z uvedených. Môžeme začať postupne skúšať:

$4:4=1 \rightarrow 1+2=3 \rightarrow 3:6$ 4 nevyhovuje

$8:4=2 \rightarrow 2+2=4 \rightarrow 4:6$ 8 nevyhovuje

$12:4=3 \rightarrow 3+2=5 \rightarrow 5:6$ 12 nevyhovuje
$16:4=4 \rightarrow 4+2=6 \rightarrow 6:6=1$ 16 vyhovuje
Použili sme čísla **16, 4, 6, 1.**
Teraz skúsime doplniť čísla **do druhého riadku**. Na konci máme násobenie 4. Teda posledné doplnené číslo bude násobok 4 a to môže byť už iba 8 alebo 12. Budeme dopĺňať odzadu.
$8:4=2 \rightarrow 2.3=6 \rightarrow 6-1=5$ nevyhovuje, lebo číslo 6 sme použili v prvom riadku.
$12:4=3 \rightarrow 3.3=9 \rightarrow 9-1=8$
Použili sme čísla **8, 9, 3, 12.**
Pozrime sa na **tretí riadok**, tam je delenie 7. Siedmimi sa dá deliť iba 7 a 14. Riadok musí začínať číslom o 3 menším, teda 4 alebo 11. Štvorku už sme použili, teda tretí riadok začne číslom 11.
$11+3=14 \rightarrow 14:7=2 \rightarrow 3.5=10$
Použili sme čísla **11, 14, 2, 10.**
Doplníme ešte čísla **do štvrtého riadka.** Ostali čísla 5, 7, 13, 15. Deliteľná troma je iba pätnástka. Preto ich doplníme v tomto poradí: **13, 15, 5, 7**.

$$\boxed{\mathbf{16}} \xrightarrow{:\,4} \boxed{\mathbf{4}} \xrightarrow{+\,2} \boxed{\mathbf{6}} \xrightarrow{:\,6} \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\boxed{\mathbf{8}} \xrightarrow{+\,1} \boxed{\mathbf{9}} \xrightarrow{:\,3} \boxed{\mathbf{3}} \xrightarrow{.\,4} \boxed{\mathbf{12}}$$

$$\boxed{\mathbf{11}} \xrightarrow{+\,3} \boxed{\mathbf{14}} \xrightarrow{:\,7} \boxed{\mathbf{2}} \xrightarrow{.\,5} \boxed{\mathbf{10}}$$

$$\boxed{\mathbf{13}} \xrightarrow{+\,2} \boxed{\mathbf{15}} \xrightarrow{:\,3} \boxed{\mathbf{5}} \xrightarrow{+\,2} \boxed{\mathbf{7}}$$

Z4-I-5

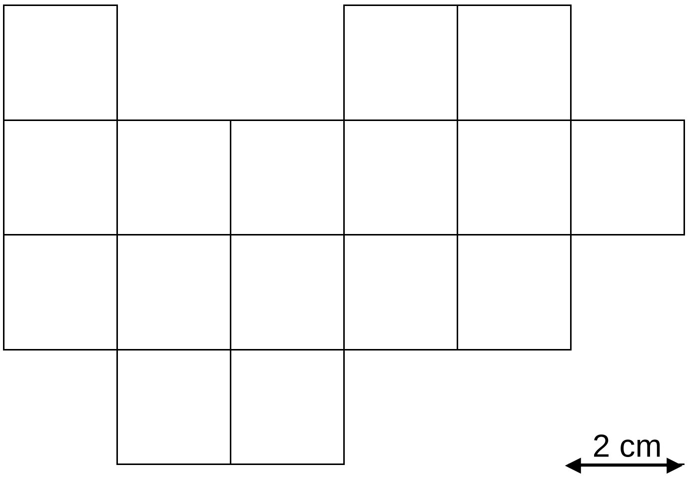
Paľko s Radkou si kupujú spolu cukríky. Pri poslednom nákupe platil Paľko 92 Sk za 5 balení z dvoch druhov cukríkov. Sám si vzal z každého druhu po jednom balení a Radka dostala jedno balenie gumených a dve balenia čokoládových cukríkov. Jej nákup bol tak o 20 Sk drahší ako Paľkov.
a) Koľko korún má za nákup dať Radka Paľkovi?
b) Koľko stojí jedno balenie gumených cukríkov?

M. Dillingerová

Riešenie:
Radka dostala o jedno balenie čokoládových cukríkov viac ako Paľko. Takže toto balenie musí stáť 20 Sk. Ak Paľko kúpil 3 balenia čokoládových a 2 balenia gumených, tak gumené cukríky museli spolu stáť:
$96-3.20=96-60=36$ Sk.
Ak dva balíčky gumených cukríkov stoja 36 Sk, tak jeden balíček stojí $36:2=18$ Sk.
a) Radka má dať Paľkovi $2.20+18=40+18=58$ Sk.
b) Jedno balenie gumených cukríkov stojí 18 Sk.

Z4-I-6

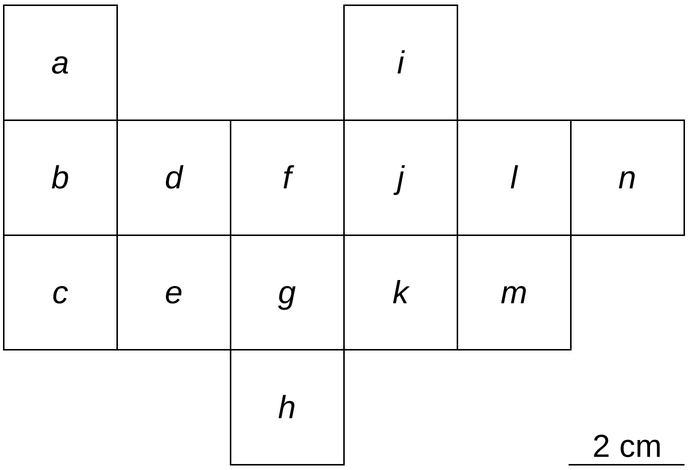
Danko si zo štvorčekovej siete vystrihol útvar ako na obrázku:



Odstrihni dva štvorčeky siete tak, aby sa výsledný útvar nerozpadol a aby mal čo najväčší obvod.
Nájdi dve riešenia.

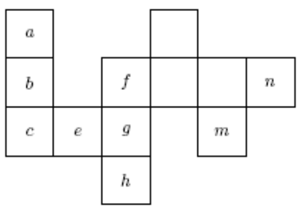
M. Dillingerová

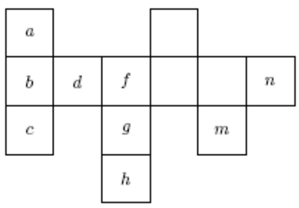
Možné riešenie: Označme jednotlivé štvorčeky písmenami *a* až *n*:



Aby bol obvod nového útvaru najväčší možný, sústredíme sa iba na štvorčeky, ktoré v pôvodnom útvare susedia s čo najviac štvorčekmi. Súčasne musí po odstrihnutí každého štvorčeku zostať výsledný útvar pohromade. Za týchto požiadaviek môžu byť odstrihnuté iba štvorčeky *d, e, f, k.*

Dvojice štvorčekov (*d,e*), (*e,f*) a (*f,k*) odstrihnúť nemôžeme, pretože by sa útvar rozpadol. Odstrihnutím dvojice (*d,f*) sa zväčší obvod útvaru o 2.2 = 4 (cm) a odstrihnutím (*d,k*) alebo (*e,k*) sa zväčší o 4.2 = 8 (cm). Pretože sme vyčerpali všetky možnosti, posledné dve varianty predstavujú riešenie úlohy, viď obrázky.





KATEGÓRIA Z5

Z5-I-1

Učiteľka Kadrnožková kupovala v pokladni zoologickej záhrady vstupenky pre svojich žiakov a pre seba. Vstupenka pre dospelého bola drahšia ako pre školáka, ale nie viac ako dvakrát. Učiteľka Kadrnožková zaplatila 994 Sk. Učiteľ Hniezdo mal so sebou o troch žiakov viac ako učiteľka Kadrnožková, a za svojich žiakov a za seba zaplatil 1120 Sk.

a) Koľko žiakov mal so sebou učiteľ Hniezdo?

b) Koľko stála vstupenka pre dospelého?

L. Šimůnek

Možné riešenie: Zo zadania bezprostredne vyplýva, že vstupné pre troch žiakov stálo 1120 – 994 =126 (Sk), takže pre jedného žiaka 126 : 3 = 42 (Sk). Za 1120 Sk by učiteľ hniezdo nakúpil vstupenky pre najviac 26 žiakov (a 28 Sk by mu potom ostalo), pretože 1120 : 42 = 26 (zvyšok 28). Keď zvyšok pridáme k cene žiackej vstupenky, získame cenu vstupenky pre dospelého (táto vstupenka má byť drahšia než žiacka, avšak nie viacej ako dvakrát). Učiteľova vstupenka teda stála 42 + 28 =70 (Sk) a žiakov bolo 26 – 1 = 25.

(pre kontrolu $25 \cdot 42 + 70 = 1120$ a $22 \cdot 42 + 70 = 994$, takže všetko je v úplnom poriadku.)

Z5-I-2

Fero Nudilsa sa zabával tým, že písal za sebou idúce prirodzené čísla. Začal jednotkou: 1234567891011... Po čase ho to prestalo baviť, dokončil práve rozpísané číslo a kriticky sa pozrel na svoj výtvor. Zistil, že v postupnosti číslic, ktoré napísal, sa vyskytuje päť jednotiek za sebou.

a) Najmenej koľko za sebou idúcich prirodzených čísel napísal Fero?

b) Najmenej koľko číslic napísal Fero?

S. Bednářová

Možné riešenie: 1. Aby bolo v rade päť jednotiek za sebou, musia byť napísané čísla väčšie než 110 a rad vyzerá takto:

123456789101112 . . . 110$\underline{11111}$2 . . .

Fero napísal najmenej 112 za sebou idúcich prirodzených čísel.

2. Pre počítanie číslic si uvedomíme, že v napísanom rade je 9 jednociferných (1-9), 90 dvojciferných (10-99) a aspoň 13 trojciferných (100-112) čísel. Dokopy Fero napísal najmenej $9 - 90 \cdot 2 - 13 \cdot 3 = \underline{\underline{228}}$ číslic.

Z5-I-3

Najvyššia známa sopka na zemeguli je Mauna Kea na Havajských ostrovoch. Jej výška od úpätia po vrchol je dokonca o 358 metrov väčšia, ako je nadmorská výška najvyššej hory sveta, Mont Everestu. Nedvíha sa však z pevniny, ale z dna Tichého oceánu, z 5000 metrovej hĺbky. Keby morská hladina v tejto oblasti klesla o 397 metrov, bola by ponorená časť Mauna Key presne rovnako vysoká, ako časť, ktorá by vyčnievala nad hladinu.

c) Akú nadmorskú výšku má vrchol sopky?

d) Koľko meria Mauna Kea od úpätia po vrchol?

e) Akú nadmorskú výšku má Mont Everest?

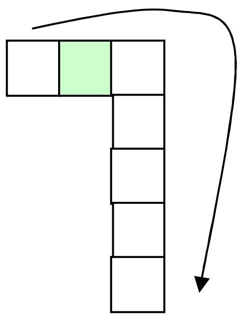
(Údaje o nadmorských výškach uvádzané v rôznych literatúrach sa môžu líšiť. Je to spôsobené jednak nepresnosťami niektorých meraní, jednak pohybmi zemskej kôry – tieto výšky sa skutočne menia! Pri riešení úlohy preto vychádzaj len z údajov uvedených v úlohe.)

S. Bednářová

Možné riešenie:

a) Keby morská hladina klesla o 397m, merala by ponorená časť sopky 5000 – 397 = 4603 (m). Sopka Mauna Kea teda meria od úpätia po vrchol 4603 + 4603 = 9206 (m).
b) Z toho vyplýva, že vrchol sopky je v nadmorskej výške 9206 – 5000 = 4206 (m).
c) A Mont Everest má nadmorskú výšku 9206 – 358 = 8848 (m)

Z5-I-4



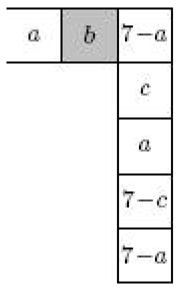
Klasická hracia kocka sa kotúľala naznačeným smerom po pláne na obrázku. Pri jej pohybe na každom políčku ostali otlačené bodky zo steny, ktorou sa plánu dotýkala. Súčet všetkých bodiek otlačených na pláne bol 23. Koľko bodiek bolo otlačených na zafarbenom políčku?
(Klasická hracia kocka má na stenách bodky 1, 2, ..., 6 umiestnené tak, že súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách je 7. Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.)

M. Dillingerová

Možné riešenie: Dvojica čísel ležiacich na protiľahlých stenách kocky sú (1,6) (2,5) a (3,4). Pri riešení úlohy je možné diskutovať všetky možnosti vzhľadom k umiestneniu kocky na prvom políčku plánu, čo je zbytočne prácne. Jednoduchšie je uvedomiť si, na ktorých políčkach sa otláčajú protiľahlé steny. Označme *a* počet bodiek na stene, ktorou sa kocka dotkne prvého políčka plánu, a *b* počet bodiek na stene, ktorou sa kocka dotkne nasledujúceho políčka plánu. Potom zistíme, že na prvých troch políčkach sú otlačené nasledujúce počty bodiek

a	b	$7-a$

Po preklopení sa na ďalšie políčko plánu nemôžeme dostať žiaden z počtov *a, 7 – a, b* ani *7 – b,* Označme teda ďalší otlačený počet bodiek *c*. Postupne na pláne získavame počty zaznamenané na obrázku.

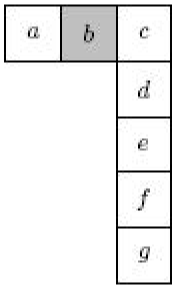


Môžeme si všimnúť, že dvojice *a, 7 – a* sa na pláne vyskytujú dvakrát a dvojice *c, 7 – c* jedenkrát. Súčet týchto dvojíc je vždy 7 a súčet všetkých otlačených bodiek je:

$$a + b + (7 - a) + c + a + (7 - c) + (7 - a) = 3 * 7 + b = 21 + b.$$

V skutočnosti bolo otlačených 23 bodiek, teda $21 + b = 23$ a $b = 2$.

Iné riešenie: Označme počty otlačených bodiek na jednotlivých políčkach *a* až *g* ako na obrázku



Na políčkach *e* a *a* je otlačená rovnaká stena a rovnako na políčkach *c* a *g* je otlačená rovnaká stena. Pretože súčet bodiek na protiľahlých stenách kocky je vždy 7, platí pri prevracaní kocky, podľa návodu, že $a + c = 7$, $d + f = 7$ a $e + g = 7$ (Podobne tiež $c + e = 7$, ale tento postreh potrebovať nebudeme). Podľa zadania bol súčet všetkých otlačených bodiek na políčkach $a + b + c + d + e + f + g = 23$, takže

$$(a + c) + (d + f) + (e + g) + b = 23,$$
$$7 + 7 + 7 + b = 23,$$
$$21 + b = 23,$$
$$b = 2.$$

Na vybranom políčku sú otlačené 2 bodky.

Z5-I-5

Digitálne hodiny ukazujú hodiny a minúty, napríklad 14:37. Akú dobu (v minútach) svieti za 24 hodín na týchto hodinách aspoň jedna päťka?

M. Volfová

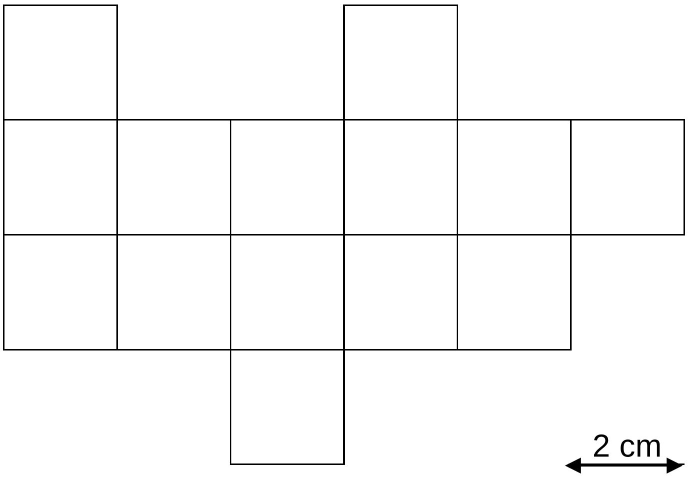
Možné riešenie: Na 1. mieste päťka svietiť nemôže. Budeme najprv uvažovať interval prvých 12 hodín:

- Na 2. mieste päťka svieti 60 minút (od 5:00 do 5:59);
  u ďalších miest preto uvažujeme len zostávajúcich 11 hodín
- Na 3. mieste svieti päťka každú hodinu 10 minút (od xx:50 do xx:59);
  celkom 11 * 10 = 110 minút.
- Na 4. mieste svieti päťka každú hodinu šesťkrát po jednej minúte (05, 15, 25, 35, 45, 55), započítame však iba 5 minút, pretože minúta xx:55 je už započítaná v predchádzajúcom odseku;
  celkom 11 * 5 * 1 = 55 minút.

Aspoň jedna päťka svieti v intervale 12 hodín 60 + 110 + 55 =225 minút, za celý deň teda 2 * 225 = 450 minút, tj. 7 hodín 30 minút (na druhom mieste je aj v dobre od 15:00 do 15:59)

Iné riešenie: V dobe od 5:00 do 5:59 svieti 60 minút päťka na druhom mieste (takisto v dobe od 15:00 do 15:59). Pre každú z ostatných 22 hodín môže vypísať minúty, v ktorých bude svietiť aspoň jedna päťka: 05, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, tj. Celkom 15 minút. Spolu za celý deň to je
2 * 60 + 22 * 15 = 120 + 330 = 450 minút.

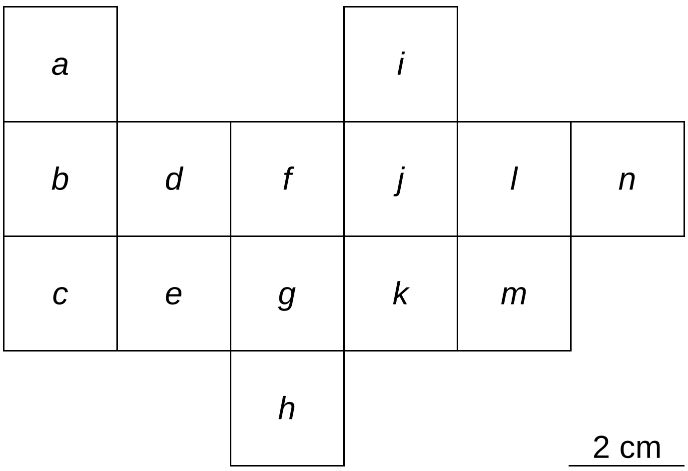
Z5-I-6
Danko si zo štvorčekovej siete vystrihol útvar ako na obrázku:



Odstrihni dva štvorčeky siete tak, aby sa výsledný útvar nerozpadol a aby mal čo najväčší obvod. Nájdi všetky riešenia.

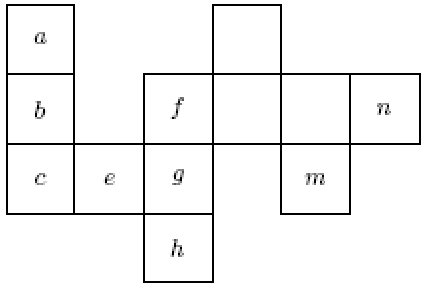
M. Dillingerová

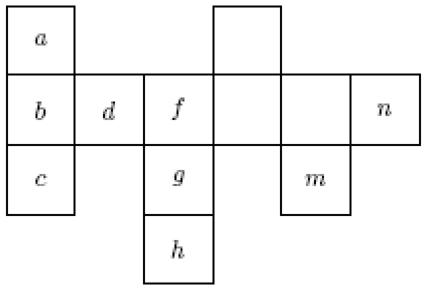
Možné riešenie: Označme jednotlivé štvorčeky písmenami *a* až *n*:



Aby bol obvod nového útvaru najväčší možný, sústredíme sa iba na štvorčeky, ktoré v pôvodnom útvare susedia s čo najviac štvorčekmi. Súčasne musí po odstrihnutí každého štvorčeku zostať výsledný útvar pohromade. Za týchto požiadaviek môžu byť odstrihnuté iba štvorčeky *d, e, f, k.*

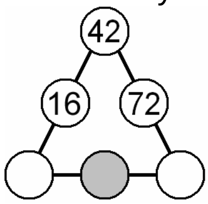
Dvojice štvorčekov (*d,e*), (*e,f*) a (*f,k*) odstrihnúť nemôžeme, pretože by sa útvar rozpadol. Odstrihnutím dvojice (*d,f*) sa zväčší obvod útvaru o 2 * 2 = 4 (cm) a odstrihnutím (*d,k*) alebo (*e,k*) sa zväčší o 4 * 2 = 8 (cm). Pretože sme vyčerpali všetky možnosti, posledné dve varianty predstavujú riešenie úlohy, viď obrázky.


a
b
f
n
c
e
g
m
h


a
b
d
f
n
c
g
m
h

KATEGÓRIA Z9

Z9-I-1
Do troch prázdnych krúžkov na obrázku patria také prirodzené čísla, že súčin troch čísel na každej strane trojuholníka je rovnaký. Ktoré najnižšie a ktoré najvyššie číslo môže byť za tejto podmienky vpísané v šedo vyfarbenom krúžku?



L. Šimůnek

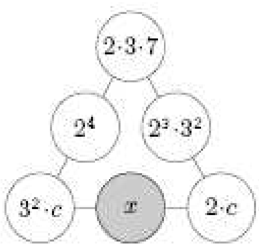
Možné riešenie: Zadané čísla ľavej strany trojuholníku dávajú súčin

$$16.42 = 2^5.3.7$$

a zadané čísla pravej strany dávajú súčin

$$42.72 = 2^4.3^3.7$$

Aby súčin čísel na ľavej strane bol rovnaký ako na pravej, musí číslo v ľavom dolnom rohu obsahovať vo svojom rozklade činiteľ 3^2 a číslo v pravom dolnom rohu činiteľ 2. Číslo v ľavom dolnom rohu vyjadríme ako $3^2.c$, kde c označuje ľubovoľné prirodzené číslo. V pravom dolnom rohu potom musí byť $2.c$ a súčin na ľavej i pravej strane je $2^5.3^3.7.c$.



Pokiaľ číslo v šedom poli označíme x, potom podmienka so zadania znamená

$$3^2.c.x.2.c = 2^5.3^3.7.c,$$

odkiaľ po úprave vyjadríme

$$x = \frac{2^4.3.7}{c} = \frac{336}{c}$$

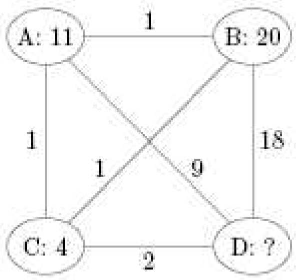
Hodnota x je najmenšia pokiaľ c je najväčší deliteľ čísla v čitateli, t.j. $c = 336$ a $x = 1$. Hodnota x je najväčšia, pokiaľ c je najmenší kladný deliteľ čísla v čitateli t.j. $c = 1$ a $x = 336$.

Z9-I-2

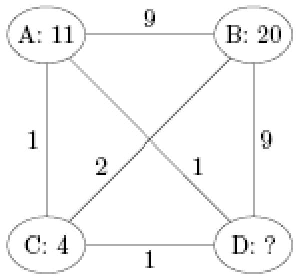
Alena, Barbora, Cyril a Dávid si spoločne kúpili tandem – bicykel pre dvoch. Na vychádzky na tandeme vyrážajú vždy v dvojici. Každý bol s každým už aspoň raz a nikto iný se na tandeme ešte neviezol. Alena bola na vychádzke na tandeme jedenásťkrát, Barbora dvadsaťkrát, Cyril iba štyrikrát. Určite, koľkokrát minimálne a koľkokrát maximálne mohol byť na vychádzke na tandeme Dávid.

L. Šimůnek

Možné riešenie: Pokiaľ by Alena, Barbora a Cyril išli každý s každým práve raz a zvyšok výletu by strávili s Dávidom, tak by bol Dávid na prechádzke 29 krát, pretože (11 – 2) + (20 – 2) + (4 – 2) = 29. Dvadsaťdeväť je najväčší možný počet. Schematicky je toto riešenie znázornene na nasledujúcom obrázku. (napr. číslo u písmena B znamená koľkokrát celkom bola Barbora na prechádzke, číslou spojnice BC vyjadruje, koľkokrát bola Barbora s Cyrilom...)



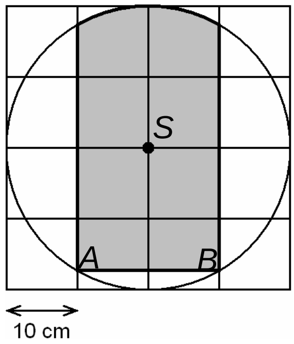
Pre riešenie úlohy chceme dosiahnuť, aby Alena, Barbora a Cyril išli spolu čo najviacej jázd. Alena s Barborou mohla ísť maximálne 9krát (11 – 2 = 9). Cyril mohol ísť s Alenou, aj s Barborou maximálne 2krát (4 – 2 = 2), avšak tohto maximálneho počtu nemohol dosiahnuť s oboma zároveň, pretože musel ísť aspoň raz s Dávidom. Pri dvoch jazdách Cyrila s Alenou by nemohlo byť dosiahnuté maximum jázd Aleny s Barborou, preto dve jazdy Cyrila realizoval s Barborou. Odtiaľto vyplýva, koľko krát bol na prechádzke Dávid: s Alenou a s Cyrilom raz, s Barborou 9krát (20 – 9 – 2 = 9), dokopy teda 11krát (1 + 1 + 9 = 11). Pre lepšiu orientáciu v texte viď obrázok:



Dávid mohol byť na prechádzke minimálne 11krát, maximálne 29krát.

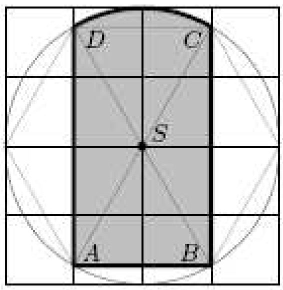
Z9-I-3

Určite obsah vyfarbenej plochy štvorcovej siete, v ktorej je narysovaná kružnica so stredom *S* vo vyznačenom mrežovom bode a polomerom 20 cm. Body *A*, *B* sú priesečníky kružnice so sieťovými priamkami.



L. Šimůnek

Možné riešenie: Úsečka AB má dĺžku rovnú polomeru zadanej kružnice. Môžeme ju teda považovať za stranu pravidelného šesťuholníku vpísaného do tejto kružnice. Tento šesťuholník rozdelíme na šesť rovnostranných trojuholníkov, viď obrázok.



Najprv spočítame obsah S_1 rovnostranného trojuholníku so stranou r = 20cm. Výšku tohto trojuholníku vyjadríme z pytagorovej vety $r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + v^2$

Dostaneme $v = \frac{\sqrt{3}}{2} r$, takže $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$.

Vyfarbená plocha sa skladá z peťuholníka *ABCSD*, ktorého obsah je $3S_1$, a kruhového výseku *DSC*. Kruhový výsek tvorí šestinu kruhu, jeho obsah je teda rovný

$$S_2 = \frac{1}{6} \pi r^2$$

Obsah vyfarbenej plochy je celkom

$$S = 3S_1 + S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{1}{6} \pi r^2 = \frac{9\sqrt{3} + 2\pi}{12} r^2.$$

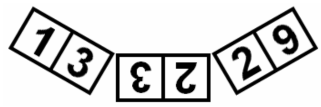
Po dosadení dostaneme približne $S \doteq 729$ cm^2.

Z9-I-4

Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ – každý kvádrik domina mal na sebe jedno dvojciferné prvočíslo, na každej polovici kvádrika bola jedna číslica tohto prvočísla.

Žiadne dvojciferné prvočíslo v domine nechýbalo, žiadne prvočíslo nebolo na dvoch kvádrikoch.
Dominik se rozhodol, že všetky kvádriky usporiada do kružnice tak, aby kvádriky ležiace vedľa seba susedili rovnakou číslicou (pozri obrázok). Jeho kamarát Filip mu povedal, že to nie je možné. Kto mal pravdu? Prečo?

M. Petrová



Možné riešenie: V kružnici zostavenej podľa zadania sa majú každé dve susedné kocky dotýkať rovnakou číslicou, každá číslica teda musí byť v kružnici zastúpená v párnom počte. Všetky dvojciferné prvočísla sú

11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

a počty jednotlivých číslic medzi týmito číslami sú:

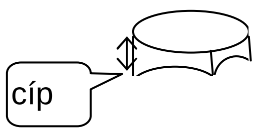
Číslice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ich počet	9x	2x	8x	3x	2x	2x	8x	2x	6x

Vidíme, že číslice 1 a 4 sú obe zastúpené v nepárnom počte. Filip mal teda pravdu a takú kružnicu spraviť nejde.

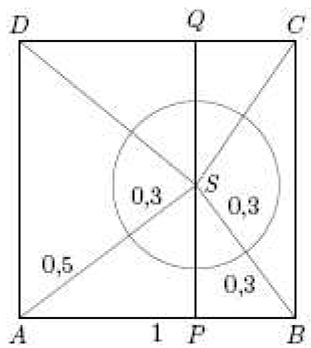
Poznámka: Nepárny počet číslic 4 (resp. 1) postačuje ako dôkaz toho, že kružnicu zostaviť nejde. Nie je nutné vypisovať celú tabuľku.

Z9-I-5
Na stole s kruhovou doskou o priemere 0,6 m je „nakrivo“ položený štvorcový obrus so stranou 1 m – jeho stred je vzhľadom na stred dosky posunutý. Jeden cíp obrusu prečnieva cez hranu dosky stola 0,5 m, susedný cíp 0,3 m. Zistite dĺžku presahu zvyšných dvoch cípov.

S. Bednářová



Možné riešenie: Vrcholy štvorcového obrusu, ktoré tvorili konce dvoch cípov známych dĺžok, označme po rade *A* a *B* zostávajúce vrcholy štvorca označíme *C* a *D*. Bod *S* ukazuje, kde sa obrus dotýka stredu dosky stola, Polomer dosky stola je 0,3m. V trojuholníku *ABS* poznáme zo zadania všetky strany: |*AB*| = 1m, |*BS*| = 0,6m a |*SA*|



= 0,8m. Pretože platí $1^2 = 0,6^2 + 0,8^2$ (pytagorova veta), ide o trojuholník pravouhlý.

Označíme *P* pätu výšky v trojuholníku *ABS* na stranu *AB*. Obsah tohto trojuholníka môžeme vyjadriť dvoma spôsobmi a síce

$$S = \frac{1}{2}|BS| \cdot |SA| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |PS|,$$

z čoho sa dá odvodiť vzťah pre výpočet veľkosti výšky *PS*:

$$|PS| = \frac{|BS| \cdot |SA|}{|AB|} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{1} = 0{,}48\,(\mathrm{m}).$$

Podľa pytagorovej vety vypočítame dĺžku strany *AP* trojuholníku *APS* a potom určíme dĺžku úsečky *PB*:

$$|AP| = \sqrt{|SA|^2 - |PS|^2} = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}48^2} = 0{,}64\,(\mathrm{m}),$$
$$|PB| = |AB| - |AP| = 1 - 0{,}64 = 0{,}36\,(\mathrm{m}).$$

V trojuholníku *SCD* označíme *Q* pätu výšky na stranu *CD*. Úsečky *DQ*, *QC* odpovedajú svojimi veľkosťami úsečkám *AP*, *PB*. Vypočítame veľkosť výšky *SQ*:

$$|SQ| = |PQ| - |PS| = 1 - 0{,}48 = 0{,}52\,(\mathrm{m}).$$

Podľa pytagorovej vety vypočítame dĺžky prepôn trojuholníku *SCQ* a *SQD*:

$$|SC| = \sqrt{|QC|^2 + |QS|^2} = \sqrt{0{,}36^2 + 0{,}52^2} = \sqrt{0{,}4} \doteq 0{,}63\,(\mathrm{m}),$$
$$|SD| = \sqrt{|QD|^2 + |QS|^2} = \sqrt{0{,}64^2 + 0{,}52^2} = \sqrt{0{,}68} \doteq 0{,}82\,(\mathrm{m}).$$

Keď od týchto dĺžok odpočítame polomer dosky stolu, zistíme, že dĺžky presahov zostávajúcich cípov obrusu sú približne 0,33m a 0,52m.

Z9-I-6

Štyriai otcovia chceli deťom sponzorovať lyžiarsky zájazd.

Prvý sľúbil: dám 11 500 Sk,
druhý sľúbil: dám tretinu toho, čo vy ostatní,
tretí sľúbil: ja dám štvrtinu toho, čo vy ostatní,
štvrtý sľúbil: ja dám pätinu toho, čo vy ostatní.

Koľko konkrétne korún sľúbil druhý, tretí, štvrtý otecko?

M. Volfová

Možné riešenie: AK dal druhý otec tretinu toho, čo ostatní, dal štvrtinu celého príspevku.
(Ak označíme príspevok *x*, dali ostatní 3*x*. Ak je celý obnos *p*, platí že *x* + 3*x* = p, teda *x* = *p*/4.) Podobne, ak dal tretí štvrtinu toho, čo ostatný, dal pätinu celého obnosu, a ak dal štvrtý pätinu toho, čo ostatný, dal šestinu celého daru. Platí teda

$$p = 11\,500 + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6}.$$

Po úprave máme (1 – 37/60)*p* = 11 500 Sk, teda celý príspevok *p* bol 30 000 Sk. Odtiaľ už ľahko uzavrieme, že druhý otec dal *p*/4 = 7500 Sk, tretí *p*/5 = 6000 Sk a štvrtý *p*/6 = 5000 Sk.

Poznámka. Ak označíme príspevok druhého, tretieho, resp štvrtého otca *x*, *y*, resp *z*, potom výsledné hodnoty sú riešením nasledujúcej sústavy rovníc:

$$x = \frac{1}{3}(11\,500 + y + z),\ y = \frac{1}{4}(11\,500 + x + z),\ z = \frac{1}{5}(11\,500 + x + y).$$

58. ročník Matematickej olympiády
Komentáre pre kategórie Z4, Z5, Z9

Náklad: 1000 výtlačkov
Vydala IUVENTA s finančnou podporou MŠ SR

Zodpovedný redaktor: RNDr. Monika Dillingerová