SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Kategórie A, B, C

58. ročník, školský rok 2008/2009

Domáce kolo

Vážení žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 58. ročníka matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **24. novembra 2008** (kategória **A**) a do **8. januára 2009** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. V kategóriách **B** a **C** tým súťaž končí. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Pokiaľ prvých n žiakov dosiahne rovnaký počet bodov, je poradie označené zhodne prvým až n-tým miestom. Podobne pre poradie na ďalších miestach. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Najviac polovica účastníkov tohto kola bude vyhlásená za úspešných riešiteľov a najviac štvrtina za víťazov 58. ročníka v kategórii **A**. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2009 v Nemecku), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2009 na Slovensku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v septembri 2009 v Poľsku).

Termíny 58. ročníka matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	02. 12. 2008	20. 01. 2009	22. – 25. 03. 2009
Kategórie B, C	22. 01. 2009	07. 04. 2009	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO* pri pobočkách JSMF. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA Bratislava v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera
Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2008/2009
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:

http://www.iuventa.sk http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm http://www.gljs.sk/mo
http://kms.sk/mo http://www.imo-official.org

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je v KMS určená kategória BETA. A nakoniec pre tých, čo majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je v KMS určená kategória GAMA. Viac informácií o KMS nájdete v priloženom samostatnom letáku.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Mgr. Peter Novotný, Mgr. Ján Mazák

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

58. ročník Školský rok 2008 / 2009 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$2\sin x\cos(x+y)+\sin y=1,$$
$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 2

Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 3

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. (*Ján Mazák*)

A – I – 4

Uvažujme nekonečnú aritmetickú postupnosť

$$a, a+d, a+2d, \dots, \qquad (*)$$

kde a, d sú prirodzené (t. j. kladné celé) čísla.

a) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel pre všetky $k=2,3,\dots$

b) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k=2,3,\dots$

c) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla, ale obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel.

d) Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla a, d, k ($k>1$) platí: Postupnosť $(*)$ buď neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla, alebo obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel. (*Jaroslav Zhouf*)

A – I – 5

V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:

a) na 8 kôpok po 251 minciach,

b) na 251 kôpok po 8 minciach. (*Radek Horenský*)

A – I – 6

Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán AC, BC sú dané body E, D tak, že $|AE|=|BD|$. Označme M stred strany AB a P priesečník priamok AD a BE. Dokážte, že obraz bodu P v stredovej súmernosti so stredom M leží na osi uhla ACB. (*Ján Mazák*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

58. ročník Školský rok 2008 / 2009 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné ôsmimi, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné deviatimi. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné siedmimi. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli. (*Peter Novotný*)

B – I – 2

Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Na strane BC, resp. CD rovnobežníka $ABCD$ určte body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD boli rovnobežné a trojuholníky ABE, AEF a AFD mali rovnaké obsahy. (*Jaroslav Zhouf*)

B – I – 4

Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. (*Ján Mazák*)

B – I – 5

Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné. (*Leo Boček*)

B – I – 6

Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n), pre ktoré je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo. (*Vojtech Bálint*)

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

58. ročník Školský rok 2008 / 2009 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún? (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC. (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi. (*Pavel Novotný*)

C – I – 4

Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$. Na polpriamke BC zostrojte taký bod G, aby obsah trojuholníka ABG bol zhodný s obsahom daného päťuholníka. (*Lucie Růžičková*)

C – I – 5

Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.) (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta PEDAS Žilinskej univerzity, Univerzitná 1, 010 26 Žilina

58. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C - domáce kolo

Autori úloh: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., doc. RNDr. Leo Boček, CSc.,
Mgr. Radek Horenský, RNDr. Tomáš Jurík, Mgr. Pavel Leischner, PhD., Mgr. Ján Mazák,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný, Mgr. Lucie Růžičková,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.

Vydala IUVENTA s finančnou podporou Ministerstva školstva SR

Miesto a dátum vydania: Bratislava, september 2008

Náklad: 600

Sadzbu programom TEX pripravil Mgr. Peter Novotný

Zodpovedný redaktor: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.