58. ročník Matematickej olympiády

Kategória Z9, tretie kolo, riešenia

Z9-III-1

Na našu „zamyšenú“ chalupu sme priviezli myšilovca kocúra Viliama. V pondelok chytil $\frac{1}{2}$ všetkých myší, v utorok $\frac{1}{3}$ zvyšku, v stredu $\frac{1}{4}$ tých, čo zostali po utorňajšom love, a v štvrtok už len $\frac{1}{5}$ zvyšku. V piatok sa zostávajúce myši radšej odsťahovali. Koľko bolo myší na chalupe pôvodne, ak sa v piatok odsťahovalo o 2 myši viac ako ich Viliam v utorok chytil?

(M. Volfová, M. Dillingerová)

Riešenie:

Predpokladajme, že pred príchodom Viliama bolo na chalupe *m* myší.

Postupne budeme vypisovať, koľko ich Viliam chytil a koľko ich na chalupe zostalo.

deň	chytených	zostalo
Pondelok	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}m$
Utorok	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}m=\frac{1}{6}m$	$\frac{1}{2}m-\frac{1}{6}m=\frac{1}{3}m$
Streda	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}m=\frac{1}{12}m$	$\frac{1}{3}m-\frac{1}{12}m=\frac{1}{4}m$
Štvrtok	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}m=\frac{1}{20}m$	$\frac{1}{4}m-\frac{1}{20}m=\frac{1}{5}m$

V piatok teda bolo na chalupe $\frac{1}{5}m$ myší, ktoré sa odsťahovali.

$$\frac{1}{5}m=\frac{1}{6}m+2$$

$$\frac{1}{30}m=2$$

$$m=60$$

Pôvodne bolo na chalupe 60 myší.

Hodnotenie:

2 body za správny výsledok; 4 body za postup.

Z9-III-2

Juraj, Vojto a Oto na súťaži získali všetky 3 medaily, zlatú, striebornú i bronzovú. Nechceli sa chváliť, tak takto žartovali:

Juraj: „Oto získal zlatú!“

Vojto: „Ale nie, Oto získal striebornú!“

Oto: „Nedostal som ani zlatú ani striebornú!“

Tréner prezradil, že nositeľ zlatej medaily hovoril pravdu a nositeľ bronzovej klamal. Zistite, kto ktorú medailu získal.

(M. Volfová)

Riešenie:

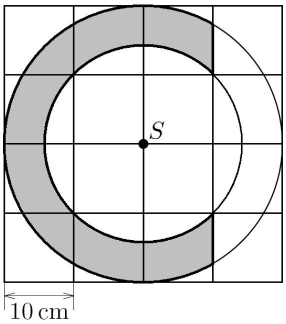
Úloha sa dá riešiť úvahou. Zaujíma nás, kto mohol dostať zlatú medailu:

Keby ju dostal Oto, tak by jeho výrok nebol pravdivý a to odporuje výroku trénera.

Keby dostal zlatú Juraj, tak by jeho výrok tiež nebol pravdivý, čo opäť odporuje výroku trénera.

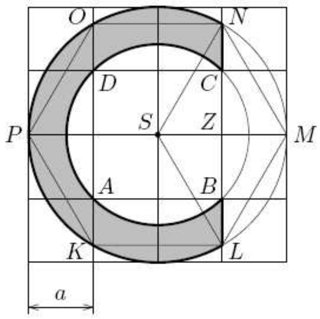
Zlatú teda dostal Vojto.
Ten ako nositeľ zlatej medaily hovorí pravdu a z jeho výroku vyplýva, že Oto získal striebornú.
Pre Juraja zostala bronzová medaila a jeho výrok je naozaj lož.
Záver: Vojto má zlatú, Oto striebornú a Juraj bronzovú medailu.
Hodnotenie:
1 bod za správny záver; 5 bodov za presné zdôvodnenie.

Z9-III-3
V štvorcovej sieti, ktorej štvorce majú stranu dĺžky 10 cm, sú narysované dve kružnice (pozri obrázok). Obe majú stred v bode *S* a každá prechádza štyrmi mrežovými bodmi. Sivo vyfarbený obrazec je ohraničený časťami týchto kružníc a jednou sieťovou priamkou. Určite obsah sivého obrazca.



(L. Šimůnek)

Riešenie:
Mrežové body, ktorými prechádza menšia kružnica, označíme *A, B, C* a *D*.
Na väčšej kružnici vyznačíme body *K, L, M, N, O* a *P* tak ako na obrázku.
Šesťuholník *KLMNOP* je pravidelný, čo vyplýva z toho, že všetky jeho vrcholy ležia na jednej kružnici, strany *KL* a *NO* majú dĺžku evidentne zhodnú s polomerom tejto kružnice a ostatné štyri strany majú rovnakú dĺžku.



Pre výpočet obsahu šedého obrazca budeme potrebovať obsah S_1 väčšieho kruhu a obsah S_2 jeho odseku vymedzeného tetivou *LN*, ďalej obsah S_3 menšieho kruhu a obsah S_4 jeho odseku vymedzeného tetivou *BC*.
Väčší kruh má polomer 2a, jeho obsah je

$$S_1 = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2 = 400\pi$$

Obsah S_2 kruhového odseku je rovný rozdielu obsahov kruhového výseku *LSN* a trojuholníka *LSN*. Uhol *LSN* zjavne vymedzuje tretinu šesťuholníka *KLMNOP*, obsah kruhového výseku *LSN* je teda rovný tretine obsahu S_1 väčšieho kruhu, t.j. $\frac{4}{3}\pi a^2 = \frac{400}{3}\pi$.
Teraz vyjadríme obsah trojuholníka *LSN*. Stred úsečky *LN* označíme *Z*. Podľa Pytagorovej vety určíme dĺžku strany *ZN* trojuholníka *SZN*:
$|ZN| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = 10\sqrt{3}$
Odtiaľ $|LN| = 20\sqrt{3}$ a obsah trojuholníka *LSN* je $\frac{1}{2}20\sqrt{3} \cdot 10 = 100\sqrt{3}$. Nakoniec môžeme vyjadriť obsah S_2 kruhového odseku:
$$S_2 = \frac{400}{3}\pi - 100\sqrt{3} = \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \cdot 100$$
Polomer menšieho kruhu odpovedá uhlopriečke štvorca so stranou a, t.j. $a\sqrt{2}$. Obsah tohto kruhu je:

$$S_3 = \pi \cdot \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi a^2 = 200\pi.$$

Ak od obsahu S_3 odpočítame obsah štvorca *ABCD* a rozdiel vydelíme štyrmi, dostaneme obsah S_4 kruhového odseku:

$$S_4 = \frac{1}{4}(200\pi - 4a^2) = 50\pi - 100.$$

Hľadaný obsah sa rovná:

$$(S_1 - S_2) - (S_3 - S_4) = 400\pi - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)100 - 200\pi + 50\pi - 100 =$$

$$= \left(\frac{7}{6}\pi + \sqrt{3} - 1\right)100 = \frac{350}{3}\pi + 100\sqrt{3} - 100$$

Hodnotenie:

Po 1 bode za obsahy S_1, S_3, S_4; 2 body za obsah S_2; 1 bod za správny záver; posledné 2 úpravy nie sú povinné.

Z9-III-4

Adam s Evou hrali šachy o jablko.

Adam vyhral a utešoval Evu: „To vieš, ja hrávam šachy dlho, dvakrát dlhšie ako ty!“

Eva sa hnevala: „Ale minule si hovoril, že ich hrávaš trikrát dlhšie!“

Adam sa divil: „To že som hovoril? A kedy to bolo?“

„Predvlani!“

„No tak to áno, hovoril som pravdu – a dnes tiež.“

Ako dlho (v rokoch) teda hráva Adam šach?

(M. Volfová)

Riešenie: Predpokladajme, že Eva hrá šachy x rokov. Potom údaje vystupujúce v zadaní úlohy môžeme stručne vyjadriť nasledujúcou tabuľkou:

	Predvlani	dnes
Eva	$x - 2$	x
Adam	$2x - 2$	$2x$

Predvlani hrával Adam šachy trikrát dlhšie než Eva, čo je vyjadrené rovnicou:

$2x - 2 = 3 \cdot (x - 2)$

$2x - 2 = 3x - 6$

$4 = x$

Odtiaľ $2x = 8$, čo znamená, že Adam hráva šachy 8 rokov.

Hodnotenie:

2 body za údaje odpovedajúce našej tabuľke bez rovnice; 2 body za zostavenie a riešenie rovnice; 2 body za správny záver.