2008/2009
58. ročník MO *Riešenia úloh domácej časti I. kola kategórie C*

---

1. *Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún?*

(Peter Novotný)

Riešenie. Dokopy chlapci dostali $3+2+1+8+2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 8=42$ Sk. Toto číslo možno jediným spôsobom vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel: $42=9+10+11+12$. Štyria chlapci teda (v nejakom poradí) vyzbierali sumy 9, 10, 11 a 12 Sk.

Žiadny chlapec nemohol dostať 8 Sk zároveň od druhého aj od piateho okoloidúceho (inak by mal aspoň 16 Sk, najviac však mohol každý z chlapcov dostať 12 Sk). Takže od druhého a piateho majú traja chlapci po 8 Sk a jeden od nich nedostal nič. Najviac jeden z týchto troch chlapcov mohol dostať 4 Sk od štvrtého okoloidúceho, inak by mali už aspoň dvaja chlapci aspoň 12 Sk. Štvrtý okoloidúci musel teda dať 4 Sk práve jednému z nich a 4 Sk zostávajúcemu chlapcovi. Bez peňazí prvého a tretieho okoloidúceho teda majú chlapci vybraných 12, 8, 8 a 4 Sk. Chlapec, ktorý dostal v súčte od druhého, štvrtého a piateho okoloidúceho dvanásť korún, už nemohol dostať od prvého a tretieho okoloidúceho nič, lebo by mal viac ako dvanásť korún. Ten, ktorý dostal v súčte od druhého, štvrtého a piateho okoloidúceho 4 Sk, musel dostať od prvého a tretieho v súčte maximálnu možnú čiastku, t. j. $3+2=5$ Sk, inak by mal dokopy menej ako 9 Sk (dostal teda práve 9 Sk a vyzbieral najmenej). Takže najmenej vyzbieral Tomáš, lebo on dostal od prvého okoloidúceho 3 Sk, a najviac Peter, ktorý od prvého okoloidúceho nedostal nič.

Úvahy ľahko dokončíme a ukážeme, že popísané rozdelenie *je* skutočne *možné*. Ako už vieme, Tomáš vyzbieral 9 Sk a Peter 12 Sk. Jakub, ktorý dostal 2 Sk od prvého, nemohol dostať od tretieho nič, takže dostal celkom 10 Sk, a Martin 11 Sk. Všetky úvahy môžeme prehľadne usporiadať do tabuľky, ktorú postupne dopĺňame.

1	2	3	4	5	Σ
	8		0	0	
	0		0	**8**	
0	0	0	**4**	**8**	$12 \to$ P
3	0	**2**	**4**	0	$\leqq 9 \to$ T
1+**2**+**3**	1×**8**	2×**2**	2×**4**	2×**8**	

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich čísel práve vtedy, keď $n \geqq 10$ a n dáva zvyšok dva po delení štyrmi. $[(k+1)+(k+2)+$ $+(k+3)+(k+4)=4k+10]$

D1. Dokážte, že ľubovoľné prirodzené číslo $n \geqq 3$, ktoré nie je mocninou čísla 2, možno vyjadriť ako súčet niekoľkých po sebe idúcich prirodzených čísel. [$n=\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}$ pre

n nepárne, $n = (\frac{n}{p} - \frac{p-1}{2}) + (\frac{n}{p} - \frac{p-1}{2} + 1) + \ldots + (\frac{n}{p} + \frac{p-1}{2})$ pre $n = p \cdot q$, kde $p > 1$ je nepárny deliteľ]

D2. V klobúku je päť loptičiek a na každej z nich je napísané jedno prirodzené číslo. Súčet čísel na loptičkách v klobúku je 27 a čísla na ľubovoľných dvoch loptičkách sa líšia aspoň o dva. Dokážte, že v klobúku nie je loptička s číslom 6. [V klobúku môžu byť buď loptičky s číslami 1, 3, 5, 7, 11, alebo 1, 3, 5, 8, 10.]

---

2. *Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC.*

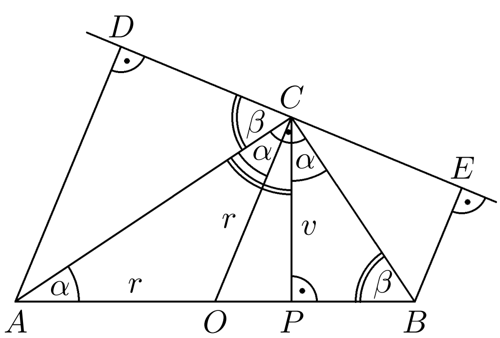
(Pavel Leischner)

Riešenie. Označme odvesny trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a, b a protiľahlé uhly α, β. Stred prepony AB (ktorý je súčasne stredom opísanej kružnice) označíme O (obr. 1).

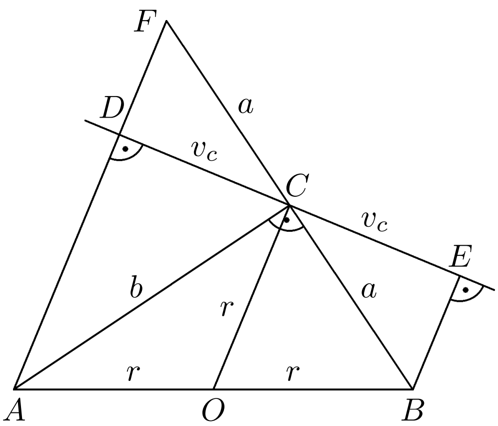
Výška $v = CP$ rozdeľuje trojuholník ABC na trojuholníky ACP a CBP podobné trojuholníku ABC podľa vety *uu* ($\alpha + \beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navyše $|OC| = |OA| = r$ (polomer opísanej kružnice). Odtiaľ $|\sphericalangle OCA| = |\sphericalangle OAC| = \alpha$ a $|\sphericalangle DCA| = 90° - |\sphericalangle OCA| = \beta$.

Pravouhlé trojuholníky ACP a ACD so spoločnou preponou AC sa teda zhodujú aj v uhloch pri vrchole C. Sú preto zhodné, dokonca súmerne združené podľa priamky AC. Analogicky sú trojuholníky CBP a CBE súmerne združené podľa BC. Takže $|CD| = |CE| = v$, čiže $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, lebo z dvojakého vyjadrenia dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC vyplýva $v = ab/|AB|$, pričom $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Namiesto dvojakého vyjadrenia obsahu môžeme na výpočet výšky CP využiť podobnosť trojuholníkov CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



Obr. 1



Obr. 2

Iné riešenie. Úsečka OC je strednou priečkou lichobežníka $DABE$, lebo je rovnobežná so základňami a prechádza stredom O ramena AB. Preto D je obrazom bodu E v súmernosti podľa stredu C. Obraz F bodu B v tej istej súmernosti leží na polpriamke AD za bodom D (obr. 2). Máme $|CF| = |BC| = a$, uhol ACF je pravý, a teda trojuholníky AFC a ABC sú zhodné. Vidíme, že CD je výška v trojuholníku

AFC zhodná s výškou v_c trojuholníka ABC, a DE je jej dvojnásobkom. Veľkosť výšky v_c dopočítame rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Odpoveď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Vyjadrite výšku v_c pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C pomocou strán a, b, c tohto trojuholníka.

D1. Nech k je kružnica opísaná pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB dĺžky c. Označme S stred strany AB a D a E priesečníky osí strán BC a AC s jedným oblúkom AB kružnice k. Vyjadrite obsah trojuholníka DSE pomocou dĺžky prepony c. [$c^2/8$]

D2. Vyjadrite obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD pomocou dĺžok a, c jeho základní a dĺžky b jeho ramien. [$\frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2-(a-c)^2}$]

D3. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblúk AC kružnice, ktorej stred leží na strane AB, pretína stranu CD v bode M. Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé. [48–C–I–2]

---

3. *Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi.*

(Pavel Novotný)

Riešenie. V riešení budeme označovať číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, ako $\bar{n}$. Rozoberieme tri prípady.

(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b sú rôzne cifry. Takže $n = 1100a + 11b$ a $\bar{n} = 1100b + 11a$. Číslo 7 má deliť ako n, tak $\bar{n}$, teda aj ich rozdiel $n - \bar{n} = 1089(a-b)$ a súčet $n + \bar{n} = 1111(a+b)$. Keďže ani číslo 1089, ani číslo 1111 nie sú násobkom siedmich a sedem je prvočíslo, tak $7 \mid a-b$ aj $7 \mid a+b$. Ak použijeme rovnakú úvahu ešte raz, vidíme, že $7 \mid (a-b)+(a+b) = 2a$ a $7 \mid (a+b)-(a-b) = 2b$, teda $7 \mid a$ a $7 \mid b$, čiže $a, b \in \{0, 7\}$. Cifry a, b sú navzájom rôzne, preto jedna z nich musí byť 0. Ale potom jedno z čísel $aabb$, $bbaa$ nie je štvorciferné. Hľadané číslo n teda nemôže mať uvedený tvar.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1010a + 101b$ a tiež $7 \mid \bar{n} = 1010b + 101a$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade odvodíme, že $7 \mid n - \bar{n} = 909(a-b)$ a $7 \mid n + \bar{n} = 1111(a+b)$, a z rovnakých dôvodov ako v predchádzajúcom prípade zisťujeme, že $7 \mid a$, $7 \mid b$. Niektorá z cifier by teda musela byť 0. Číslo n tak nemôže mať ani tvar $abab$.

(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom otočením poradia cifier vznikne to isté číslo, takže máme jedinú podmienku $7 \mid 1001a + 110b$. Keďže $7 \mid 1001$ a $7 \nmid 110$, je táto podmienka ekvivalentná s podmienkou $7 \mid b$. Preto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všetkých 17 čísel, ktoré práve uvedené podmienky spĺňajú: 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ktorých zápise sa vyskytujú práve dve jednotky. [56–C–S–1]

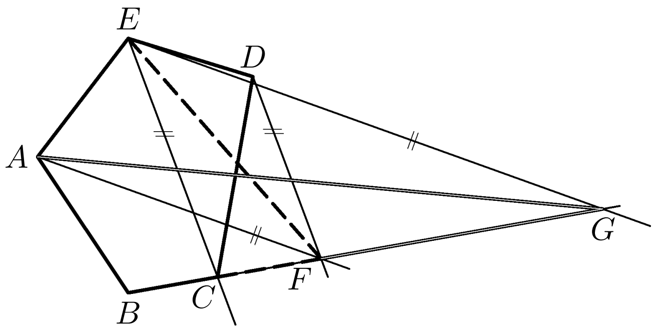
N2. Určte počet všetkých trojíc dvojciferných prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky cifry rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich iba raz. [54–C–I–5]

N3. K prirodzenému číslu m zapísanému rovnakými ciframi sme prečítali štvorciferné prirodzené číslo n. Získali sme štvorciferné číslo s opačným poradím cifier, než má číslo n. Určte všetky také dvojice čísel m a n. [52–C–I–5]

4. *Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$. Na polpriamke BC zostrojte taký bod G, aby obsah trojuholníka ABG bol zhodný s obsahom daného päťuholníka.*

(Lucie Růžičková)

Riešenie. *Rozbor.* Najskôr uvažujme bod F, ktorý je priesečníkom priamky BC a rovnobežky s EC prechádzajúcej bodom D (keďže $E \notin BC$, sú EC a BC rôznobežné, obr. 3). Obsahy trojuholníkov ECD a ECF sú zhodné (majú spoločnú stranu EC a zhodnú výšku na túto stranu), obsah päťuholníka $ABCDE$ je teda zhodný s obsahom štvoruholníka $ABFE$.



Obr. 3

Ďalej uvažujme bod G, ktorý je priesečníkom priamky BC a rovnobežky s AF prechádzajúcej bodom E. Potom sú opäť obsahy trojuholníkov AFE a AFG zhodné, a sú preto zhodné aj obsahy štvoruholníka $ABFE$ a trojuholníka ABG. Bod G tak má požadovanú vlastnosť.

Hľadaný bod je na polpriamke BC jediný, lebo pre rôzne body X, Y na polpriamke BC majú trojuholníky ABX a ABY rôzne výšky na spoločnú stranu AB, majú teda rôzne obsahy.

Popis konštrukcie.

1. p; $p \parallel EC$, $D \in p$;
2. F; $F \in p \cap BC$;
3. q; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné riešenie.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme P priesečník uhlopriečok daného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že priamky AB a CD sú rovnobežné práve vtedy, keď trojuholníky ADP a BCP majú rovnaký obsah. [Rovnosť obsahov trojuholníkov ADP a BCP je ekvivalentná s rovnosťou obsahov trojuholníkov ABC a ABD so spoločnou stranou AB.]

N2. V kružnici s polomerom 2 je daná tetiva AB dĺžky 3. Určte, aký najväčší obsah môže mať štvoruholník $AXBY$, ak jeho vrcholy X, Y ležia na kružnici k. [Najväčší obsah 6 má deltoid, ktorého uhlopriečka XY je priemerom kružnice k.]

D1. Daný je obdĺžnik $ABCD$. Nech priamky p a q, ktoré prechádzajú vrcholom A, pretínajú polkružnice zvonka pripísané stranám BC a CD daného obdĺžnika postupne v bodoch K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a strany BC a CD postupne v bodoch P a Q tak, že trojuholník ABP má rovnaký obsah ako trojuholník KCP a zároveň trojuholník AQD má rovnaký obsah ako trojuholník CLQ. Dokážte, že body K, L, C ležia na jednej priamke. [53–C–I–2]

5. *Z množiny* $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ *vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)*

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Čísla od 1 do 99 rozdelíme podľa ich zvyšku po delení číslom 11 do jedenástich deväťprvkových skupín T_0, T_1, …, T_{10}:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{11, 22, 33, \dots, 99\},\\ T_1 &= \{\ 1, 12, 23, \dots, 89\},\\ T_2 &= \{\ 2, 13, 24, \dots, 90\},\\ &\ \vdots\\ T_{10} &= \{10, 21, 32, \dots, 98\}. \end{aligned}$$

Ak vyberieme jedno číslo z T_0 (viac ich ani vybrať nesmieme) a všetky čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5, dostaneme vyhovujúci výber $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel, lebo súčet dvoch čísel z 0, 1, 2, 3, 4, 5 je deliteľný jedenástimi jedine v prípade $0 + 0$, z množiny T_0 sme však vybrali iba jedno číslo.

Na druhej strane, v ľubovoľnom vyhovujúcom výbere je najviac jedno číslo zo skupiny T_0 a najviac 9 čísel z každej zo skupín

$$T_1 \cup T_{10},\ T_2 \cup T_9,\ T_3 \cup T_8,\ T_4 \cup T_7,\ T_5 \cup T_6,$$

lebo pri výbere 10 čísel z niektorej skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by medzi vybranými bolo niektoré číslo zo skupiny T_i a aj niektoré číslo zo skupiny T_{11-i}; ich súčet by potom bol deliteľný jedenástimi. Celkom je teda vo výbere najviac $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel.

Poznámka. Možno uvedené „učesané“ riešenie vyzerá príliš trikovo. Avšak počiatočné úvahy každého riešiteľa k nemu rýchlo vedú: iste záleží len na zvyškoch vybraných čísel, takže rozdelenie na triedy T_i a vyberanie z nich je prirodzené. Je jasné, že z T_0 môže byť vybrané len jedno číslo a všetko ďalšie, o čo sa musíme starať, je požiadavka, aby sme nevybrali zároveň po čísle zo skupiny T_i aj zo skupiny T_{11-i}. Ak je už vybrané niektoré číslo z triedy T_i, kde $i \neq 0$, môžeme kľudne vybrať všetky čísla z T_i, to už skúmanú vlastnosť nepokazí. Je preto dokonca jasné, ako *všetky* možné výbery najväčšieho počtu čísel vyzerajú.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ukážte, že z ľubovoľných n prirodzených čísel možno vybrať niekoľko (napríklad aj jedno) tak, že ich súčet je deliteľný číslom n. [Uvažujte čísla a_1, $a_1 + a_2$, …, $a_1 + \dots + a_n$ a ich zvyšky po delení n.]

N2. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n ($n \geqq 2$) je možné z množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$ vybrať aspoň dve navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n. [54–C–I–2]

D1. Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojciferných prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčítaných čísel. [55–C–I–3]

6. *Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí*

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Ľavú nerovnosť dokážeme ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \qquad \big| \cdot 6(a+b) \\ 3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2), \\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vzhľadom na predpoklad $a \neq b$ platí. Aj pravú nerovnosť zo zadania budeme ekvivalentne upravovať, začneme umocnením každej strany na druhú:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad \big| \cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je súčtom nerovností $2a^2b^2 < a^4+b^4$ a $4a^2b^2 < 2a^3b+2ab^3$, ktoré obe platia, lebo po presune členov z ľavých strán na pravé dostaneme po rozklade už zrejmé nerovnosti $0 < (a^2-b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a-b)^2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pre $a, b \in \mathbb{R}$ dokážte

$$a^4+b^4 \geqq a^3b+b^3a.$$

[Upravte na tvar $(a^3-b^3)(a-b) \geqq 0$.]

D1. Dokážte, že pre každé tri reálne čísla x, y, z, ktoré spĺňajú nerovnosti $0 < x < y < z < 1$, platí nerovnosť

$$x^2+y^2+z^2 < xy+yz+zx+z-x.$$

[48–C–II–4]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b a c platí nerovnosť

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

[55–B–S–1]

D3. Ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti

$$a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1,$$

platí nerovnosť

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť. [55–C–II–2]