1. *Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné ôsmimi, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné deviatimi. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné siedmimi. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli.*

(Peter Novotný)

Riešenie. Označme n trojciferné číslo určené prvým trojčíslím (zľava) hľadaného štvorciferného čísla, ktoré je potom rovné $10n + 8$. Podľa zadania úlohy platí

$$8 \mid 10n + 8, \tag{1}$$
$$9 \mid 10n + 7, \tag{2}$$
$$7 \mid 10n + 9. \tag{3}$$

Zo vzťahu (1) vyplýva $8 \mid 10n$, čiže $4 \mid 5n$. Čísla 4 a 5 sú nesúdeliteľné, preto $4 \mid n$, čiže $n = 4k$, kde k je prirodzené číslo. Dosadením $n = 4k$ do vzťahu (2) dostaneme $9 \mid 40k + 7$, čiže $9 \mid 4k + 7$. Z tabuľky zvyškov čísel $4k + 7$ po delení deviatimi

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4k+7$	7	2	6	1	5	0	4	8	3

vidíme, že toto číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď číslo k po delení deviatimi dáva zvyšok 5. Preto $k = 9l + 5$, kde l je celé číslo, takže $n = 4k = 36l + 20$. Dosadením takého n do vzťahu (3) dostaneme $7 \mid 360l + 209$, čiže $7 \mid 3l - 1$. Opäť zostavíme tabuľku zvyškov, tentoraz po delení čísla $3l - 1$ siedmimi.

l	0	1	2	3	4	5	6
$3l-1$	6	2	5	1	4	0	3

Vidíme, že $7 \mid 3l - 1$ práve vtedy, keď $l = 7m + 5$, kde m je celé číslo. Odtiaľ dostávame, že všetky celočíselné n spĺňajúce trojicu podmienok (1)–(3) sú tvaru $n = 36l + 20 = 252m + 200$.

Dodajme, že namiesto zostavovania tabuliek sme mohli využiť úpravy

$$40k + 7 = 36k + 4(k - 5) + 27,$$
$$360l + 209 = 357l + 3(l - 5) + 224,$$

z ktorých by sme ako skôr dostali $9 \mid k - 5$ a $7 \mid l - 5$.

Číslo $n = 252m + 200$ je trojciferné jedine pre $m \in \{0, 1, 2, 3\}$; hľadané n je preto z množiny $\{200, 452, 704, 956\}$ a na tabuli bolo napísané jedno z čísel 2 008, 4 528, 7 048, 9 568. Skúškou (ktorá však pri našom postupe nie je nutná) môžeme overiť, že každé z týchto štyroch čísel vyhovuje zadaniu úlohy.

Iné riešenie. Pri druhom postupe budeme úvahy o deliteľnosti výhodne zapisovať kongruenciami. Zápis $a \equiv b \pmod{m}$ (čítame „a je kongruentné s b modulo m“) znamená, že čísla a, b dávajú po delení číslom m rovnaké zvyšky, čiže $m \mid a - b$.

Označme N hľadané štvorciferné číslo končiace číslicou 8. Keďže pri jej zámene číslicou 7, resp. 9 dostaneme číslo $N-1$, resp. $N+1$, všetky podmienky zo zadania úlohy možno vyjadriť štyrmi kongruenciami

$$N \equiv 8 \pmod{10}, \tag{4}$$
$$N \equiv 0 \pmod{8}, \tag{5}$$
$$N-1 \equiv 0 \pmod{9}, \tag{6}$$
$$N+1 \equiv 0 \pmod{7}. \tag{7}$$

Zo vzťahu (5) vyplýva $N = 8k$, kde k je celé číslo. Dosadením do vzťahu (4) dostaneme $8k \equiv 8 \pmod{10}$, čiže $4k \equiv 4 \pmod{5}$, čo po delení číslom 4 (nesúdeliteľným s číslom 5) vedie k podmienke $k \equiv 1 \pmod{5}$. Preto $k = 5l + 1$, kde l je celé číslo. Dosadením $N = 8k = 40l + 8$ do vzťahu (6) obdržíme podmienku $40l + 7 \equiv 0 \pmod{9}$. Jej úpravou dostaneme

$$40l \equiv -7 \equiv -7 + 9 \cdot 23 = 200 \pmod{9}$$

a po vydelení číslom 40 (nesúdeliteľným s číslom 9) dôjdeme k podmienke $l \equiv 5 \pmod{9}$. Existuje teda celé číslo m také, že $l = 9m + 5$. Dosadením $N = 40l + 8 = 360m + 208$ do vzťahu (7) dostaneme $360m + 209 \equiv 0 \pmod{7}$, čiže $3m \equiv 1 \pmod{7}$. Úpravou

$$3m \equiv 1 \equiv 1 + 2 \cdot 7 = 15 \pmod{7}$$

po vydelení číslom 3 vyjde $m \equiv 5 \pmod{7}$, takže $m = 7n + 5$, kde n je celé číslo. Hľadané N je preto tvaru $N = 360m + 208 = 2\,520n + 2\,008$. Také N je štvorciferné práve vtedy, keď $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Na tabuli preto mohlo byť napísané ktorékoľvek číslo z množiny $\{2\,008, 4\,528, 7\,048, 9\,568\}$ a žiadne iné.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou a) $5 \mid n+1$, $6 \mid n$, $7 \mid n-1$; b) $4 \mid n-2$, $5 \mid n-3$, $6 \mid n-4$. [a) 204, b) 58]

N2. Určte všetky prirodzené čísla n, ktoré sa nedajú zapísať v tvare $n = 3x + 5y$, kde x, y sú prirodzené čísla. [35–C–I–2]

D1. Pre ľubovoľné trojciferné číslo určíme zvyšky po delení číslami 2, 3, 4, ..., 10 a získaných deväť čísel sčítame. Určte najmenšiu možnú hodnotu takého súčtu. [47–C–I–1]

---

2. *Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí*

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme po úprave

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Sú preto možné dva prípady, ktoré rozoberieme samostatne.

a) *Prípad* $z - x = 0$. Dosadením $z = x$ do prvej rovnice sústavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$, čiže $y(x - y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ alebo $x = y$. V prvom prípade dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, x)$, v druhom $(x, y, z) = (x, x, x)$; také trojice sú riešeniami danej sústavy pre ľubovoľné reálne číslo x, ako ľahko overíme dosadením (aj keď taká skúška pri našom postupe vlastne nie je nutná).

b) *Prípad* $2z + 2x + y = 0$. Dosadením $y = -2x - 2z$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2, \quad \text{čiže} \quad 5(x + z)^2 = 0.$$

Posledná rovnica je splnená práve vtedy, keď $z = -x$, vtedy však $y = -2x - 2z = 0$. Dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, ktoré sú riešeniami danej sústavy pre každé reálne x, ako overíme dosadením. (O takej skúške platí to isté čo v prípade a).)

Odpoveď. Všetky riešenia (x, y, z) danej sústavy sú trojice troch typov:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

Iné riešenie. Obe rovnice sústavy sčítame. Po úprave dostaneme rovnicu

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opäť rozlíšime dve možnosti.

a) *Prípad* $y = 0$. Z prvej rovnice sústavy ihneď vidíme, že $x^2 = z^2$, čiže $z = \pm x$. Skúškou overíme, že každá z trojíc $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pre ľubovoľné reálne x riešením.

b) *Prípad* $x + z - 2y = 0$. Dosadením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + \frac{x(x + z)}{2} = \frac{(x + z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úprave} \quad x^2 = z^2.$$

Platí teda $z = -x$ alebo $z = x$. Dosadením do rovnosti $x + z - 2y = 0$ v prvom prípade dostaneme $y = 0$, v druhom prípade $y = x$. Zodpovedajúce trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) sú riešeniami pre každé reálne x (prvé z nich sme však našli už v časti a)).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

[Odčítaním rovníc dostaneme po úprave $(x - y)(x + y + 2) = 0$. Ak $x = y$, potom $x = y = 1$. Pre $x + y = -2$ sústava nemá riešenie.]

D1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2, \\ y^2 - z &= x^2, \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

[57–A–S–1]

D2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

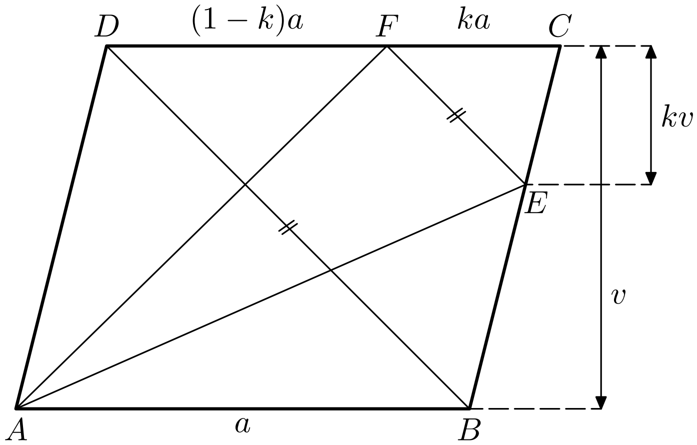
$$\begin{aligned} x^2 + y + z &= 2, \\ x + y^2 + z &= 2, \\ x + y + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

[Rozdiel prvých dvoch rovníc sústavy možno upraviť na tvar $(x - y)(x + y - 1) = 0$. Riešeniami sú ľubovoľné permutácie trojíc $(1, 1, 0)$, $(2, -1, -1)$ a tiež dve trojice (a, a, a) pre $a = -1 \pm \sqrt{3}$.]

3. *Na strane BC, resp. CD rovnobežníka $ABCD$ určte body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD boli rovnobežné a trojuholníky ABE, AEF a AFD mali rovnaké obsahy.*

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Označme a veľkosť strán AB a CD a v vzdialenosť ich priamok, ktorá je zároveň rovná výške trojuholníka AFD z vrcholu A (obr. 1). Z podmienky $EF \parallel BD$ podľa vety *uu* vyplýva, že trojuholníky BCD a ECF sú podobné; označme $k \in (0,1)$ koeficient ich podobnosti. Keď ho vypočítame, bude úloha vyriešená.



Obr. 1

Keďže $|FC| = ka$, $|FD| = (1-k)a$ a výšky trojuholníkov ECF, ABE zo spoločného vrcholu E majú veľkosti kv, resp. $(1-k)v$, pre obsahy trojuholníkov AFD a ABE platí

$$S_{AFD} = \frac{(1-k)av}{2} = \frac{a(1-k)v}{2} = S_{ABE},$$

takže oba obsahy sa rovnajú pre ľubovoľné $k \in (0,1)$. Obsah trojuholníka ECF má hodnotu $S_{ECF} = \frac{1}{2}ka \cdot kv = \frac{1}{2}k^2av$ a obsah celého rovnobežníka $ABCD$ je daný vzťahom $S_{ABCD} = av$, preto môžeme obsah trojuholníka AEF vyjadriť takto:

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ECF} - S_{AFD} = \\ &= av\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-k) - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}(1-k)\right) = av\left(k - \tfrac{1}{2}k^2\right). \end{aligned}$$

Obsahy trojuholníkov ABE, AFD teda budú zhodné s obsahom trojuholníka AEF práve vtedy, keď bude platiť

$$\tfrac{1}{2}(1-k) = k - \tfrac{1}{2}k^2, \quad \text{čiže} \quad k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má korene

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

z ktorých podmienke $k \in (0,1)$ vyhovuje iba koreň $k = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$. Dodajme, že pre také k platí

$$1 - k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{k}{1-k}.$$

Odpoveď. Hľadané body E, F sú určené pomermi

$$|CE| : |EB| = |CF| : |FD| = \left(\sqrt{5} - 1\right) : 2.$$

Poznámka. Rovnosť $(1-k) : 1 = k : (1-k)$ zo záveru riešenia znamená, že body E, F delia príslušné strany rovnobežníka v pomere tzv. *zlatého rezu.* Vyjadrujú to rovnosti

$$|CE| : |EB| = |EB| : |BC| \quad \text{a} \quad |CF| : |FD| = |FD| : |DC|.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD. Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$. [55–C–II–1]

N2. Daný je lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s jednotkovým obsahom, pre ktorý platí $|AB| = 2|CD|$. Označme K, L postupne stredy strán BC a CD. Určte obsah trojuholníka AKL. [Obsahy trojuholníkov ABK, CLK a ADL sú postupne $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$ a $\frac{1}{6}$, teda obsah trojuholníka AKL je $\frac{5}{12}$.]

D1. Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG| : |CG|$. [54–B–I–2]

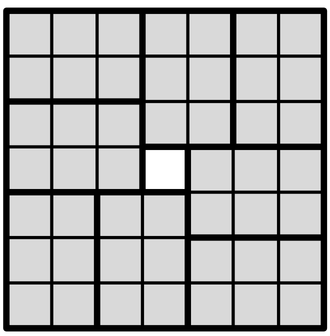
---

4. *Na pláne* 7×7 *hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď* 2×3*. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli.*

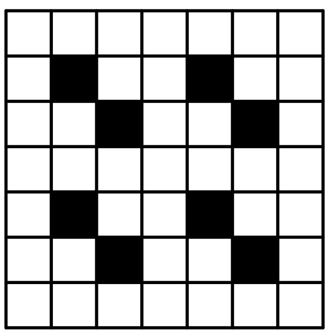
(Ján Mazák)

Riešenie. Podľa obr. 2 môžeme na plán umiestniť 8 disjunktných obdĺžnikov 2×3 (stredné políčko plánu zostane prázdne). Aby sme s istotou zasiahli loď, musíme sa spýtať na aspoň jedno políčko v každom z ôsmich vyznačených obdĺžnikov, preto je nutný počet otázok aspoň 8.

Na obr. 3 je uvedený príklad výberu ôsmich políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sa už mimo nich nedala na plán umiestniť žiadna loď 2×3. Preto týchto 8 otázok k zasiahnutiu lode vždy stačí.



Obr. 2



Obr. 3

Z oboch uvedených úvah vyplýva nasledujúci záver.

Odpoveď. Najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli, je práve 8.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na pláne $n \times n$ hráme hru lode. Nachádza sa na ňom jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. Úlohu riešte pre $n = 3, 4, 5$. [1, 2, 4]

N2. Predošlú úlohu riešte pre jednu loď 2×2 na pláne 8×8 a na pláne 7×7. [16, 12]

D1. Určte najmenšie prirodzené číslo k s vlastnosťou: keď vyberieme k rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1999\}$, potom medzi nimi existujú dve, ktorých súčet je 2000. [49–C–S–1]

D2. Určte najmenšie prirodzené číslo k s vlastnosťou: keď vyberieme k rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 2000\}$, potom medzi nimi existujú dve, ktorých súčet alebo rozdiel je 667. [49–A–S–3]

D3. Nájdite najmenšie prirodzené čísla k, pre ktoré platia jednotlivé tvrdenia a), b) a c): Ak obsadíme figúrkami ľubovoľných k políčok šachovnice 8×8, tak budú obsadené niektoré a) tri susedné políčka niektorého riadku, b) tri susedné políčka niektorého šikmého radu, c) štyri susedné políčka niektorého riadku alebo stĺpca. Pod šikmým radom rozumieme takú skupinu políčok, ktorých uhlopriečky jedného z oboch smerov ležia na jednej priamke. [49–C–I–3]

D4. Dokážte, že na šachovnici 8×8 nemožno rozmiestniť 7 strelcov tak, aby všetky políčka šachovnice boli ohrozené. Ďalej ukážte, že možno na šachovnici rozmiestniť 8 strelcov tak, aby každé neobsadené políčko šachovnice bolo ohrozené niektorým zo strelcov. [37–B–II–2, 37–B–S–1]

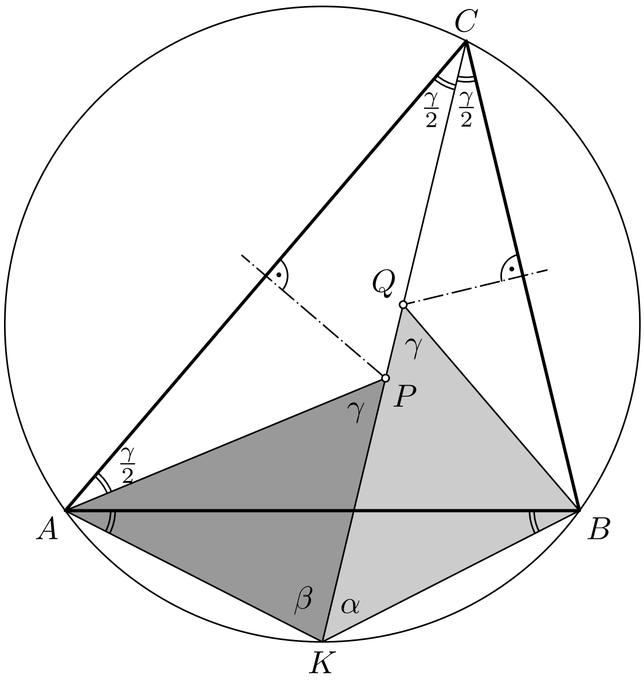
D5. Aký najväčší počet kráľov možno umiestniť na šachovnicu 8×8, aby sa žiadni dvaja navzájom neohrozovali? [16. Šachovnicu rozdeľte na 16 častí 2×2, v každej z nich môže byť najviac jeden kráľ.]

---

5. *Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné.*

(Leo Boček)

Riešenie. Označme α, β, γ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (obr. 4). Bod K leží na osi úsečky AB, preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a B sú



Obr. 4

teda zhodné. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné aj uhly BCK a BAK, resp. ACK a ABK, preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK. Polpriamka CK je teda osou uhla ACB:

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC, je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Rovnako z rovnoramenného trojuholníka BCQ odvodíme, že aj veľkosť uhla BQK je γ. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly ABC a AKC, teda uhol AKC (čiže uhol AKP) má veľkosť β a – celkom analogicky – uhol BKQ má veľkosť α.

V každom z trojuholníkov AKP a BKQ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zostávajúce uhly KAP a KBQ majú veľkosti α, resp. β.

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany AK a KB aj obe dvojice k nim priľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov KAP a KBQ cez uhly APK a BQK možno obísť takto: zhodnosť uhlov KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) vyplýva zo zhodnosti uhlov KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme K, L päty výšok z vrcholov A, B, ďalej M stred strany AB a V priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že os uhla KML prechádza stredom úsečky VC. [54–B–II–3]

D1. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D2. Označme S stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku ABS leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. [Pre bod K z riešenia súťažnej úlohy platí $|KA| = |KB| = |KS|$, lebo $S \in KC$ a $|\sphericalangle KAS| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, takže aj $|\sphericalangle KSA| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.]

---

6. *Nájdite všetky dvojice celých čísel* (m, n)*, pre ktoré je hodnota výrazu*

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

(Vojtech Bálint)

Riešenie. Najskôr si všimnime, že menovateľ zlomku možno postupným vynímaním rozložiť na súčin $(m+2)(n-1)$. Preto bude výhodné položiť $a = m+2$, $b = n-1$ a pre nové neznáme (nenulové!) celé čísla a, b skúmať, kedy je hodnota daného výrazu

$$V = \frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2} = \frac{(a-2) + 3(b+1) - 1}{ab} = \frac{a + 3b}{ab}$$

(ako vyžaduje zadanie) *celé kladné* číslo (používajme ďalej zvyčajný termín *prirodzené číslo*). Uveďme dva možné prístupy k riešeniu takej otázky.

Pri prvom spôsobe využijeme rozklad

$$V = \frac{a+3b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{3}{a}$$

a zrejmé odhady

$$0 < \left|\frac{1}{b}\right| \leqq 1, \qquad 0 < \left|\frac{3}{a}\right| \leqq 3.$$

Keby platilo $a < 0$, bolo by $\frac{3}{a} < 0$, čiže $V < 1/b \leqq 1$, teda V by nebolo prirodzené číslo. Preto nutne platí $a > 0$.

Pre $a > 6$ je $3/a < \frac{1}{2}$, a teda $V < 1/b + \frac{1}{2}$, takže nerovnosť $V \geqq 1$ platí jedine vtedy, keď $1/b > \frac{1}{2}$, čo spĺňa jediné celé číslo $b = 1$, pre ktoré máme $1 < V < \frac{3}{2}$. Preto musí platiť $1 \leqq a \leqq 6$. Týchto šesť možností jednotlivo rozoberieme:

- ▷ $a = 1$. Číslo $V = 3 + 1/b$ je celé jedine pre $b = \pm 1$, kedy je aj kladné. V pôvodných neznámych dostávame dve riešenia $(m, n) = (-1, 2)$ a $(m, n) = (-1, 0)$.
- ▷ $a = 2$. Číslo $V = \frac{3}{2} + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = \pm 2$; zodpovedajúce riešenia sú $(m, n) = (0, 3)$ a $(m, n) = (0, -1)$.
- ▷ $a = 3$. Číslo $V = 1 + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = 1$, teda $(m, n) = (1, 2)$.
- ▷ $a = 4$. Číslo $V = \frac{3}{4} + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = 4$, teda $(m, n) = (2, 5)$.
- ▷ $a = 5$. Číslo $V = \frac{3}{5} + 1/b$ zrejme nie je celé pre žiadne celé b.
- ▷ $a = 6$. Číslo $V = \frac{1}{2} + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = 2$, teda $(m, n) = (4, 3)$.

Odpoveď. Existuje práve 7 dvojíc celých čísel (m, n), pre ktoré je hodnota daného výrazu V celým kladným číslom, sú to dvojice

$$(m, n) \in \{(-1, 2), (-1, 0), (0, 3), (0, -1), (1, 2), (2, 5), (4, 3)\}.$$

Iné riešenie. Hľadáme nenulové celé a, b, pre ktoré $a + 3b = kab$ pre vhodné prirodzené k. Označme $d \geqq 1$ najväčší spoločný deliteľ takých čísel a, b. Potom $a = xd$ a $b = yd$ pre celé nesúdeliteľné čísla x, y, ktoré spĺňajú rovnicu $(x + 3y)d = kxyd^2$, čiže $x + 3y = kxyd$. Odtiaľ vyplýva, že číslo y delí nesúdeliteľné číslo x. To je možné jedine vtedy, keď $y = \pm 1$.

V prípade $y = 1$ máme rovnicu $x + 3 = kxd$, čiže $3 = x(kd - 1)$. Keďže platí $kd \geqq 1$ (čísla k, d sú prirodzené), tak buď $x = 1$ a $kd - 1 = 3$ (potom $kd = 4$, a teda $d \in \{1, 2, 4\}$, takže $(a, b) = (d, d)$ je jedna z dvojíc $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$), alebo $x = 3$ a $kd - 1 = 1$ (potom $kd = 2$, a teda $d \in \{1, 2\}$, takže $(a, b) = (3d, d)$ je jedna z dvojíc $(3, 1)$, $(6, 2)$).

V prípade $y = -1$ máme rovnicu $x - 3 = -kxd$, čiže $3 = x(1 + kd)$, čo vzhľadom na nerovnosť $1 + kd \geqq 2$ znamená, že $x = 1$ a $1 + kd = 3$, takže $kd = 2$, a teda $d \in \{1, 2\}$, preto $(a, b) = (d, -d)$ je jedna z dvojíc $(1, -1)$, $(2, -2)$.

Zistili sme, že existuje sedem vyhovujúcich dvojíc (a, b), vypísať zodpovedajúce riešenia $(m, n) = (a - 2, b + 1)$ je už jednoduché (poz. odpoveď vyššie).

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky riešenia rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v obore celých kladných čísel. Riešenia, ktoré sa líšia iba poradím, nepovažujeme za rôzne. [36–B–II–3b]

N2. Nech a, b sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Potom prirodzené čísla x, y, z, kde $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$, sú nesúdeliteľné a platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Dokážte.

N3. Nech naopak x, y, z sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, pre ktoré platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Ukážte, že potom existujú prirodzené čísla a, b také, že $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$. [33–C–I–5]