---

**1.** *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} ax + y &= 2, \\ x - y &= 2a, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

*s neznámymi $x$, $y$ a reálnym parametrom $a$.*

(Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Sčítaním druhej a tretej rovnice dostaneme $2x = 2a + 1$, odčítaním druhej rovnice od tretej $2y = -2a + 1$. Odtiaľ vyjadríme

$$x = a + \tfrac{1}{2}, \quad y = -a + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

a dosadíme do prvej rovnice pôvodnej sústavy. Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$a^2 - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{2} = 0, \tag{2}$$

ktorá má korene $a_1 = -1$ a $a_2 = \frac{3}{2}$. Pre každú z týchto dvoch (jediných možných) hodnôt parametra $a$ už ľahko stanovíme neznáme $x$ a $y$ dosadením do vzťahov (1).

Daná sústava rovníc má riešenie iba pre dve hodnoty parametra $a$, jednak pre $a = -1$, keď je jej jediným riešením $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, jednak pre $a = \frac{3}{2}$, keď $(x, y) = (2, -1)$.

Skúška dosadením je jednoduchá, možno ju vynechať takýmto zdôvodnením: Sústava dvoch rovníc, ktorú sme dostali (a vyriešili) sčítaním a odčítaním druhej a tretej rovnice, je s dvojicou pôvodných rovníc ekvivalentná. Zostávajúca (prvá) rovnica sústavy je potom ekvivalentná s kvadratickou rovnicou (2), ktorej riešením sme našli možné hodnoty parametra $a$.

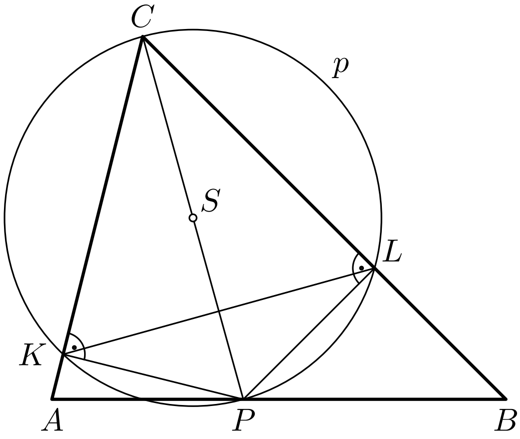
Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za správne vyjadrenie $x$ a $y$ z druhej a tretej rovnice, 2 body za vyriešenie kvadratickej rovnice, ktorá vznikne dosadením týchto hodnôt do prvej rovnice, a po 1 bode za správnu odpoveď a skúšku. Za numerické chyby pri výpočte strhnite najviac 1 bod.

---

**2.** *Pre vnútorný bod $P$ strany $AB$ ostrouhlého trojuholníka $ABC$ označme $K$ a $L$ päty kolmíc z bodu $P$ na priamky $AC$ a $BC$. Zostrojte taký bod $P$, pre ktorý priamka $CP$ rozpoľuje úsečku $KL$.*

(Pavel Calábek)

**Riešenie.** Označme $S$ stred úsečky $CP$. Podľa Tálesovej vety ležia body $K$ a $L$ na kružnici $p$ zostrojenej nad priemerom $CP$. Predpokladajme, že bod $P$ má požadovanú vlastnosť, t. j. že priemer $CP$ rozpoľuje tetivu $KL$ (obr. 1).




Obr. 1

Priemer ľubovoľnej kružnice rozpoľuje každý iný priemer tejto kružnice a tiež všetky tetivy naň kolmé. Žiadnu inú tetivu rozpoľovať nemôže: keď totiž prechádza dvoma *rôznymi* bodmi jej osi súmernosti (stredom tetivy a stredom kružnice), musí byť – rovnako ako táto os – na danú tetivu kolmý.

Tetiva $KL$ však nemôže byť priemerom kružnice $p$, pretože podľa Tálesovej vety by bol uhol $KCL$ (a teda aj uhol $ACB$) pravý, čo odporuje zadaniu, preto je tetiva $KL$ na priemer $CP$ kolmá. V tomto prípade sú trojuholníky $CKP$ a $CLP$ súmerne združené podľa priamky $CP$, odkiaľ už vyplýva, že uhly $KCP$ a $LCP$ sú zhodné. Polpriamka $CP$ je teda osou uhla $ACB$.

Ak je naopak polpriamka $CP$ osou uhla $ACB$, zhodujú sa pravouhlé trojuholníky $CKP$ a $CLP$ v spoločnej prepone $CP$ a v dvoch vnútorných uhloch, takže body $K$ a $L$ sú súmerne združené podľa priamky $CP$. Preto tetiva $CP$ rozpoľuje úsečku $KL$.

*Odpoveď.* Existuje práve jeden vnútorný bod strany $AB$ ostrouhlého trojuholníka $ABC$, pre ktorý úsečka $CP$ rozpoľuje úsečku $KL$. Je to priesečník osi vnútorného uhla pri jeho vrchole $C$ so stranou $AB$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za dôkaz skutočnosti, že bod $P$ musí ležať na osi uhla $ACB$ a 2 body za overenie, že bod ležiaci na osi uhla má požadovanú vlastnosť. Ak riešiteľ bez dôkazu uvedie, že bod $P$ leží na osi uhla $ACB$, udeľte len 1 bod. Tvrdenie o tetivách, ktoré priemer kružnice rozpoľujú, možno považovať za zrejmé. Naopak, strhnite 1 bod, ak si riešiteľ neuvedomí, že tetiva $KL$ nemôže byť priemerom kružnice $p$.

---

**3.** *Číslo nazveme magickým práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako súčet trojciferného čísla $m$ a trojciferného čísla $m'$ zapísaného rovnakými číslicami v opačnom poradí. Niektoré magické čísla možno takto vyjadriť viacerými spôsobmi; napríklad* $1554 = 579 + 975 = 777 + 777$. *Určte všetky magické čísla, ktoré majú takých vyjadrení $m + m'$ čo najviac. (Na poradie $m$ a $m'$ neberieme ohľad.)*

*(Aleš Kobza)*

**Riešenie.** Každé trojciferné číslo má vyjadrenie $m = 100a + 10b + c$, kde $a$, $b$, $c$ sú jeho cifry a $a \neq 0$. Trojciferné číslo zapísané rovnakými ciframi v opačnom poradí má potom vyjadrenie $m' = 100c + 10b + a$, $c \neq 0$. Keďže na poradie čísel $m$ a $m'$ neberieme ohľad, pre určitosť predpokladajme, že $m \leqq m'$, čiže $a \leqq c$, pričom $a, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Pre magické číslo $x$ podľa zavedeného označenia cifier platí

$$x = m + m' = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že hodnota $x$ nezávisí ani tak od jednotlivých cifier $a$, $c$, ako od ich súčtu $s = a + c$, ktorý môže nadobúdať hodnoty $s \in \{2, 3, \dots, 18\}$. Ďalej už budeme pracovať iba s vyjadrením $x = 101s + 20b$.

Predpokladajme na chvíľu, že sa ako súčet $101s + 20b$ dá niektoré magické číslo $x$ zapísať dvoma rôznymi spôsobmi:

$$x = 101s + 20b = 101s' + 20b'. \tag{1}$$

Z rovnosti $101(s - s') = 20(b - b')$ a nesúdeliteľnosti čísel 101 a 20 vyplýva, že číslo 101 musí deliť číslo $b - b'$. Keďže však $b$ a $b'$ sú cifry, platí $-9 \leqq b - b' \leqq 9$. V tomto intervale nájdeme jediné číslo deliteľné číslom 101, a to číslo 0. Preto $b - b' = 0$, čiže $b = b'$, a teda aj $s = s'$. To však odporuje predpokladu, že číslo $x$ má dve rôzne vyjadrenia tvaru (1). Znamená to, že vo vyjadrení $x = 101s + 20b$ má každé magické číslo $x$ jednoznačne určenú cifru $b$ aj jednoznačne určený súčet $s$.

Počet spôsobov, ktorými možno magické číslo vyjadriť ako súčet $m + m'$, čiže $101s + 20b$, sa preto rovná počtu spôsobov, ktorými možno vyjadriť zodpovedajúcu hodnotu $s$ ako súčet dvoch cifier $a$ a $c$, pričom $1 \leqq a \leqq c \leqq 9$. V množine $\{2, 3, \dots, 18\}$ má najväčší počet takých vyjadrení číslo $s = 10$, ktoré sa dá vyjadriť práve piatimi vyhovujúcimi súčtami:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ostatné čísla majú takých vyjadrení menej.

Naozaj: v prípade $s \leqq 9$ z rovnosti $a + c \leqq 9$ a predpokladu $a \leqq c$ vyplýva $a \leqq 4$, takže menšia cifra $a$ nadobúda nanajvýš štyri hodnoty, rovnako ako väčšia cifra $c$ v prípade $s \geqq 11$, keď zo vzťahov $a + c \geqq 11$ a $a \leqq c$ vyplýva $c \geqq 6$.

Najväčším počtom súčtov $m + m'$ (piatimi súčtami) sa dajú vyjadriť magické čísla tvaru $101 \cdot 10 + 20b$, kde $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, jedná sa teda o čísla z desaťprvkovej množiny

$$\{1\,010, 1\,030, 1\,050, \dots, 1\,190\}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za dôkaz skutočnosti, že magické číslo má jediné vyjadrenie súčtom $101s + 20b$. Poznatok, že najväčší počet vyjadrení $s = a + c$ má číslo $s = 10$, je natoľko zrejmý, že môže byť uvedený bez zdôvodnenia. V prípade správneho postupu s numericky chybným vyčíslením niektorých z 10 riešení strhnite najviac 1 bod.

*Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.*

*Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.*