

1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}2 \sin x \cos(x + y) + \sin y &= 1, \\2 \sin y \cos(y + x) + \sin x &= 1.\end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Použitím známych vzorcov

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

dostaneme úpravou ľavej strany prvej rovnice

$$\begin{aligned}2 \sin x \cos(x + y) + \sin y &= 2 \sin x (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \sin y = \\&= 2 \sin x \cos x \cos y + (1 - 2 \sin^2 x) \sin y = \\&= \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y = \\&= \sin(2x + y).\end{aligned}$$

Podobne ľavá strana druhej rovnice je rovná $\sin(2y + x)$. Zadaná sústava je teda ekvivalentná so sústavou

$$\begin{aligned}\sin(2x + y) &= 1, \\ \sin(2y + x) &= 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Keďže funkcia sínus nadobúda hodnotu 1 práve v bodoch tvaru $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde k je celé číslo, budú riešením sústavy práve tie dvojice (x, y) , pre ktoré existujú celé čísla k, l také, že

$$2x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad 2y + x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi.\tag{2}$$

Odtiaľ buď odčítaním vhodných násobkov rovníc alebo priamym vyjadrením jednej premennej z prvej rovnice a dosadením do druhej rovnice po úprave dostaneme

$$x = \frac{\pi}{6} + (4k - 2l)\frac{\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{6} + (4l - 2k)\frac{\pi}{3}.$$

Riešením sústavy sú teda dvojice $(\frac{\pi}{6} + (4k - 2l)\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + (4l - 2k)\frac{\pi}{3})$, kde k, l sú ľubovoľné celé čísla. Nie je nutné robiť skúšku, nakoľko z postupu vyplýva, že takéto dvojice (x, y) spĺňajú vzťahy (2) a teda aj sústavu (1).

Poznámka. Uvedený výsledok možno zapísať aj v inom tvare. Keďže $x - y = (6k - 6l)\frac{\pi}{3} = 2\pi(k - l)$, možno pri položení $m = k - l$, $n = 2k - l$ písať $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$, $y = x - 2\pi m$, teda riešením sú dvojice $(\frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3} - 2\pi m)$, kde m, n sú ľubovoľné celé čísla. (Keď k, l prebiehajú všetky možné dvojice celých čísel, tak aj m, n prebehnú všetky možné dvojice celých čísel.)

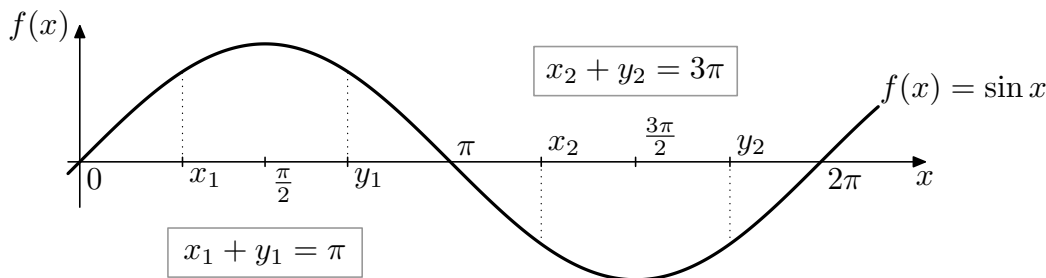
Iné riešenie. Zrejme ak je riešením zadanej sústavy dvojica (x, y) , sú vďaka periodicite funkcií sínus a kosínus s periódou 2π riešením aj všetky dvojice $(x + 2k\pi, y + 2l\pi)$. Budeme teda sústavu riešiť v obore $\langle 0, 2\pi \rangle$ a na konci nájdeme riešenia „posunieme“ o $(2k\pi, 2l\pi)$, aby sme získali všeobecné riešenie.

Odčítaním rovníc sústavy získame po rozklade ľavej strany na súčin rovnicu

$$(\sin x - \sin y)(2 \cos(x + y) - 1) = 0.$$

Rozlíšime dva prípady podľa toho, ktorý z činiteľov je nulový.

I. Ak $\sin x = \sin y$, tak vzhľadom na podmienku $x, y \in \langle 0, 2\pi \rangle$ máme tri možnosti: buď $x = y$, alebo $x + y = \pi$, alebo $x + y = 3\pi$ (obr. 1).



Obr. 1

Pri prvej možnosti po dosadení do pôvodnej sústavy získame jedinú rovnicu

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1.$$

Z nej s využitím vzorca $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ a po substitúcii $\sin x = t$ ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x &= 1, \\ 2t(1 - 2t^2) + t &= 1, \\ 4t^3 - 3t + 1 &= 0, \\ (t + 1)(2t - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme „uhádli“ koreň $t = -1$ a rozklad na súčin získali vydelením mnohočlena $4t^3 - 3t + 1$ koreňovým činiteľom $t + 1$. Vzhľadom na použitú substitúciu $t = \sin x$ sú riešením ostatnej rovnice tie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pre ktoré buď $\sin x = -1$, alebo $\sin x = \frac{1}{2}$, čiže $x \in \{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$. V skúmanom obore teda dostávame ako riešenia zadanej sústavy dvojice $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ a $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Pri druhej a tretej možnosti, t. j. keď $x + y = \pi$ alebo $x + y = 3\pi$, máme $\cos(x + y) = -1$. Dosadením do pôvodnej sústavy (s využitím rovnosti $\sin x = \sin y$) získame jedinú rovnicu $2 \sin x \cdot (-1) + \sin x = 1$. Preto $\sin x = -1$, a teda aj $\sin y = -1$. Odtiaľ získame v skúmanom obore jediné riešenie $x = y = \frac{3\pi}{2}$, ktoré sme našli aj pri prvej možnosti.

II. Ak $2 \cos(x + y) - 1 = 0$, čiže $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, tak $x + y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ pre nejaké celé k a niektoré znamienko. Po dosadení do pôvodnej sústavy dostaneme jedinú rovnicu $\sin x + \sin y = 1$, ktorá prejde na tvar $\sin x + \sin(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi - x) = 1$. Vďaka periodicke funkcie sínus s periódou 2π a použitím známeho vzorca

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

môžeme ľavú stranu upraviť na tvar

$$\begin{aligned}\sin x + \sin(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi - x) &= \sin x + \sin(\pm \frac{\pi}{3} - x) = 2 \sin(\pm \frac{\pi}{6}) \cos(x \mp \frac{\pi}{6}) = \\ &= 2 \cdot (\pm \frac{1}{2}) \cos(x \mp \frac{\pi}{6}) = \pm \cos(x \mp \frac{\pi}{6}).\end{aligned}$$

Riešená rovnica je teda ekvivalentná s rovnicou $\pm \cos(x \mp \frac{\pi}{6}) = 1$.

Pre „horné“ znamienko dostávame $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$, čomu v obore $\langle 0, 2\pi \rangle$ vyhovuje iba $x = \frac{\pi}{6}$. Odtiaľ $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $y = \frac{\pi}{6}$. Pre „dolné“ znamienko máme $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -1$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $x = \frac{5\pi}{6}$. Odtiaľ $y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi - x = 2k\pi - \frac{7\pi}{6}$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $y = \frac{5\pi}{6}$. Dostávame tak len riešenia, ktoré sme objavili aj v prvom prípade.

Záver. Riešením v obore $\langle 0, 2\pi \rangle$ sú dvojice $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. V obore reálnych čísel sú to potom dvojice

$$(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2l\pi), \quad (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2l\pi), \quad (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2l\pi),$$

kde k, l sú ľubovoľné celé čísla.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte platnosť známych súčtových vzorcov

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

[Prvý vzorec možno dokázať napr. vhodným použitím kosínusovej vety pre trojuholník, ktorého dva vrcholy ležia na jednotkovej kružnici a tretí vrchol je jej stredom. Druhý vzorec sa dá ľahko odvodiť z prvého.]

D1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$1 + \sin \frac{x + \pi}{5} \cdot \sin \frac{x - \pi}{11} = 0.$$

[55-A-S-3]

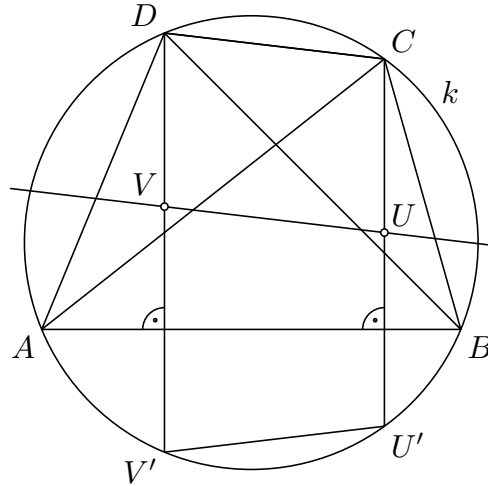
D2. Dokážte, že $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. [Ak $\alpha = 36^\circ$, tak $\sin 2\alpha = \sin 3\alpha$, lebo $2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$. Keďže $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ a

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha = \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1),\end{aligned}$$

dostávame $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)$. Po vydelení nenulovým $\sin \alpha$ máme $4 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha - 1 = 0$. Číslo $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ je jediným kladným riešením kvadratickej rovnice $4t^2 - 2t - 1 = 0$.]

2. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnice priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD .
(Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme k kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$. Nech priesečníky výšok trojuholníkov ABC a ABD sú postupne U a V (obr. 2).



Obr. 2

Niekoľko známych vlastností priesečníka výšok v súvislosti s opísanou kružnicou je zachytených v návodných a dopĺňajúcich úlohách. V našej situácii sa nám bude hodiť, že obraz U' bodu U v osovej súmernosti podľa strany AB leží na kružnici k , ktorá je opísanou kružnicou trojuholníka ABC . (Toto platí aj pre tupouhlý trojuholník ABC .) Podobne leží na kružnici k aj obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa strany AB .

Predpokladajme, že trojuholníky ABC a ABD sú ostrouhlé. Potom body U a V ležia v polrovine ABC . Priamky CU' a DV' sú rovnobežné, preto štvoruholník $CU'V'D$ je tetivový lichobežník, a teda je to lichobežník rovnoramenný. Z tohto a z vlastností osovej súmernosti dostávame rovnosti

$$|\sphericalangle CDV'| = |\sphericalangle U'V'D| = |\sphericalangle UVV'|.$$

Keďže body C a U ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku $V'D$, sú priamky CD a UV rovnobežné, ako sme mali dokázať. (V poslednej úvahe sme využili, že body D, V, V' ležia na priamke v tomto poradí.)

V prípade, keď aspoň jeden z trojuholníkov ABC a ABD je tupouhlý, je argumentácia veľmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoria rovnoramenný lichobežník, aj keď na jeho obvode môžu ležať v inom poradí.

Iné riešenie. Nech U je priesečník výšok trojuholníka ABC . Ukážeme, že dĺžka úsečky CU nezávisí od polohy bodu C na oblúku AB kružnice k opísanej trojuholníku ABC .

Budeme používať štandardné označenie pre veľkosti strán a uhlov v trojuholníku ABC . Označme navyše K päť výšky z vrcholu A na stranu BC . Predpokladajme najskôr, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Jednoduchým výpočtom z vhodných trojuholníkov zistíme, že $|\sphericalangle CUK| = \beta$. Využitím goniometrických funkcií v trojuholníkoch AKC a UKC dostaneme

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin |\sphericalangle CUK|} = \frac{b \cos \gamma}{\sin \beta} = \frac{c \cos \gamma}{\sin \gamma},$$

posledná rovnosť vyplýva zo sínusovej vety v trojuholníku ABC . Analogickým spôsobom možno ukázať, že aj v prípade, keď ABC je tupouhlý trojuholník, platí $|CU| = c |\cos \gamma| / \sin \gamma$. Dĺžka úsečky CU teda závisí len od dĺžky úsečky AB a od veľkosti

obvodového uhla ACB . V našom prípade je úsečka AB aj oblúk kružnice pevný, preto sa dĺžka úsečky CU nemení.

Body C a D ležia na tom istom oblúku kružnice k určenom úsečkou AB . Preto sú úsečky CU a DV rovnako dlhé. Navyše sú rovnobežné, čiže štvoruholník $CDVU$ je rovnobežník. A teda priamky CD a VU sú rovnobežné.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k . Dokážte, že obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa priamky AB leží na kružnici k . Majú túto vlastnosť aj tupouhlé trojuholníky? [Stačí vyjadriť veľkosť uhla AVB z trojuholníka AVB , v ktorom zvyšné dva uhly dopyčujeme z vhodných pravouhlých trojuholníkov. Tento uhol má veľkosť $180^\circ - |\sphericalangle ACB|$, z čoho vyplýva, že štvoruholník $ACBV'$ je tetivový. Obraz priesečníka výšok v osovej súmernosti podľa strany leží na opísanej kružnici aj v prípade, že trojuholník je tupouhlý. Dôkaz sa spraví podobne vypočítaním veľkostí vhodných uhlov.]
- N2. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC . Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkmi ABV , BCV , CAV sú zhodné a porovnajte ich polomer s polomerom kružnice opísanej trojuholníku ABC . [Všetky tri kružnice sú obrazom kružnice opísanej trojuholníku ABC v osovej súmernosti podľa príslušnej strany. Je to priamym dôsledkom predchádzajúcej návodnej úlohy.]
- N3. Daný je trojuholník ABC s ortocentrom H . Vyjadrite veľkosť úsečky CH pomocou dĺžok strán a veľkostí uhlov trojuholníka ABC . Snažte sa, aby vaše vyjadrenie bolo čo najjednoduchšie. [Pozri druhé uvedené riešenie súťažnej úlohy. Možných postupov aj vyjadrení je viacero.]
- D1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s priesečníkom výšok V a opísanou kružnicou k . Dokážte, že obraz bodu V v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky AB leží na kružnici k . Majú túto vlastnosť aj tupouhlé trojuholníky?
- D2. V rovine sú dané tri navzájom rôzne zhodné kružnice so spoločným bodom H . Druhé priesečníky dvojíc týchto kružníc (rôzne od bodu H) označíme A , B , C . Dokážte, že bod H je priesečníkom výšok trojuholníka ABC .
- D3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s päťami výšok D , E , F ležiacimi postupne na stranách AB , BC , CA . Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE . Určte veľkosť uhla BAC . [57–A–II–3]
- D4. Daný je trojuholník ABC . Dokážte, že os uhla ACB a os strany AB sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC .
- D5. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L , M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA , BCD . Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD . Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]
- D6. Na kružnici s polomerom r leží 5 rôznych bodov A , B , C , D , E v tomto poradí, pričom platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholmi sú ortocentrá trojuholníkov ACD , BCD a BCE , je pravouhlý. [C-P-S trojstretnutie 2006/1]
- D7. Dokážte, že všetky stredy strán a päť výšok v ľubovoľnom trojuholníku ležia na jednej kružnici. (Táto kružnica je známa pod názvom *Feuerbachova kružnica* alebo kružnica deviatich bodov – okrem spomínaných šiestich bodov na nej totiž ešte ležia stredy úsečiek spájajúcich priesečník výšok s jednotlivými vrcholmi trojuholníka.)
- D8. Nech ABC je trojuholník a P bod v jeho rovine. Označme D , E , F päť kolmíc z bodu P na priamky AB , BC , CA . Dokážte, že ak bod P leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC , tak body D , E , F ležia na priamke. (Táto priamka sa nazýva *Simsonovou priamkou* bodu P .) Má takúto vlastnosť aj nejaký bod P ležiaci mimo kružnice opísanej trojuholníku ABC ?
- D9. Nech P je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABC . Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC . Nech X je priesečník Simsonovej priamky bodu P s úsečkou PH . Dokážte, že X je stredom úsečky PH a leží na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC . (Riešenie tejto náročnej úlohy je možné nájsť na stránke <http://mathforum.org/library/drmath/view/61688.html>.)
- D10. Nech PQ je ľubovoľný priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC . Dokážte, že Simsonove priamky bodov P a Q sú na seba kolmé a pretínajú sa na Feuerbachovej kružnici trojuholníka ABC . (Druhá časť tejto úlohy je naozaj náročná.)

3. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\frac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.

(Ján Mazák)

Riešenie. Predpokladajme, že prirodzené čísla x, y vyhovujú zadaniu, t. j.

$$\frac{xy^2}{x+y} = p, \quad (1)$$

pričom p je prvočíslo. Označme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel x, y . Potom $x = da, y = db$, pričom prirodzené čísla a, b už nemajú žiadneho spoločného deliteľa väčšieho ako 1, teda sú nesúdeliteľné. Rovnosť (1) tak môžeme po vynásobení menovateľom $x + y$ a vydelení kladným číslom d zapísať v tvare

$$d^2 ab^2 = p(a+b). \quad (2)$$

Keďže b^2 delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú stranu. Avšak čísla a, b sú nesúdeliteľné, preto aj čísla $b^2, a+b$ sú nesúdeliteľné¹. Podľa známeho tvrdenia² potom $b^2 \mid p$. Prvočíslo p má iba dva delitele: 1 a p . Z nich je druhou mocninou iba číslo 1, preto nutne $b = 1$. Rovnosť (2) teda môžeme prepísať na

$$d^2 a = p(a+1). \quad (3)$$

Zopakujeme teraz podobné úvahy. Keďže a delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú stranu. Pritom čísla $a, a+1$ sú nesúdeliteľné, takže $a \mid p$. Nutne preto buď $a = 1$, alebo $a = p$. Rozlíšime dva prípady.

Ak $a = 1$, tak po dosadení do (3) máme $d^2 = 2p$. Zrejme $2p$ je druhou mocninou prirodzeného čísla jedine v prípade $p = 2$. Potom $d = 2$ a dostávame dvojicu $x = 2, y = 2$.

Ak $a = p$, dosadením do (3) a vydelením kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$, čiže $p = (d+1)(d-1)$. Čísla $d+1, d-1$ sú teda dva rôzne (nezáporné) delitele prvočísla p , z čoho nutne $d-1 = 1, d+1 = p$. Takže $d = 2, p = 3$ a dostávame dvojicu $x = 6, y = 2$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe nájdene dvojice vyhovujú zadaniu.

Záver. Zadaniu vyhovujú dvojice (2, 2) a (6, 2).

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že ak sú čísla a, b nesúdeliteľné, t. j. $\text{nsd}(a, b) = 1$, tak aj a) $\text{nsd}(b, a+b) = 1$; b) $\text{nsd}(b^2, a+b) = 1$. [a) Ak by b a $a+b$ mali deliteľa $d > 1$, ten by delil aj ich rozdiel, ktorý je rovný a , teda d by bol spoločným deliteľom čísel a, b . b) Ak by b^2 a $a+b$ mali spoločného deliteľa $d > 1$, mali by aj spoločného prvočíselného deliteľa p , ktorý by nutne delil aj b , teda b a $a+b$ by mali spoločného deliteľa $p > 1$; ďalej rovnako ako v časti a).]

N2. Dokážte, že ak $\text{nsd}(k, l) = 1$ a $k \mid lm$, tak $k \mid m$. [Keďže $k \mid lm$, tak $lm = kt$ pre nejaké celé t . Keďže k, l sú nesúdeliteľné, tak $kx + ly = 1$ pre nejaké celé x, y . Vynásobením číslom m dostaneme $m = kmx + lmy = k(mx + ty)$, teda $k \mid m$.]

D1. Určte všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré platí $p + q^2 = q + p^3$. [55-B-II-1]

D2. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55-C-II-4]

¹ Poz. prvú návodnú úlohu.

² Poz. druhú návodnú úlohu.

4. Uvažujme nekonečnú aritmetickú postupnosť

$$a, a + d, a + 2d, \dots, \quad (*)$$

kde a, d sú prirodzené (t. j. kladné celé) čísla.

- Nájdite príklad postupnosti (*), ktorá obsahuje nekonečne veľa k -tych mocnín prirodzených čísel pre všetky $k = 2, 3, \dots$
- Nájdite príklad postupnosti (*), ktorá neobsahuje žiadnu k -tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \dots$
- Nájdite príklad postupnosti (*), ktorá neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla, ale obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel.
- Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Postupnosť (*) buď neobsahuje žiadnu k -tu mocninu prirodzeného čísla, alebo obsahuje nekonečne veľa k -tych mocnín prirodzených čísel.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie. a) Položme napríklad $a = 1, d = 1$. Potom postupnosť (*) má tvar

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$

t. j. obsahuje všetky prirodzené čísla. Medzi nimi je samozrejme nekonečne veľa k -tych mocnín pre každé k . (Vyhovujúce a, d možno zvoliť aj mnohými inými spôsobmi.)

b) Položme napríklad $a = 2, d = 4$. Postupnosť (*) má vtedy tvar

$$2, 6, 10, 14, \dots,$$

t. j. obsahuje čísla $4n + 2$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Táto postupnosť obsahuje len párne čísla, preto určite neobsahuje žiadnu k -tu mocninu nepárneho čísla. Avšak k -ta mocnina ľubovoľného párneho čísla je deliteľná číslom 2^k , teda aj číslom 4 (pre $k \geq 2$), a nemôže byť tvaru $4n + 2$. Takže zvolená postupnosť neobsahuje žiadnu k -tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \dots$ (Podobne možno zdôvodniť, že vyhovuje postupnosť, ktorú dostaneme voľbou $a = p, d = p^2$ pre ľubovoľné prvočíslo p .)

c) Položme napríklad $a = 8, d = 16$. Postupnosť (*) má vtedy tvar

$$8, 24, 40, 56, \dots,$$

t. j. obsahuje čísla $16n + 8$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Keďže $16n + 8 = 8(2n + 1)$, zvolená postupnosť neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla. V rozklade na súčin prvočísel má totiž každý jej člen činiteľ 2^3 , zatiaľ čo druhé mocniny majú v rozklade na súčin prvočísel všetky exponenty párne. Na druhej strane, v danej postupnosti sa zrejme nachádzajú všetky čísla $(2 \cdot 1)^3, (2 \cdot 3)^3, (2 \cdot 5)^3, \dots$, čiže 8-násobky tretích mocnín nepárnych čísel. Takže postupnosť obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel. (Opäť sme mohli a, d zvoliť aj inak, stačí zobrať $a = p^3, d = p^4$, kde p je ľubovoľné prvočíslo.)

d) Ak sa v postupnosti (*) nenachádza žiadna k -ta mocnina, dokazované tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme, že sa v postupnosti nachádza aspoň jedna k -ta mocnina. Všeobecný člen v (*) má tvar $a + nd$, pričom n je nezáporné celé číslo. Pre nejaké

prírodné číslo m teda platí $m^k = a + nd$. Chceme ukázať, že medzi členmi z (*) je nekonečne veľa ďalších k -tych mocnín. Všetky členy postupnosti (*) dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok (taký, ako dáva po delení číslom d číslo a). Zároveň vieme, že ak dve čísla dávajú po delení d rovnaký zvyšok, dávajú rovnaký zvyšok po delení d aj ich k -te mocniny. V postupnosti (*) teda budú ležať aj k -te mocniny čísel $m + td$ pre ľubovoľné prírodné číslo t . Naozaj, podľa binomickej vety máme

$$\begin{aligned} (m + td)^k &= m^k + km^{k-1}td + \binom{k}{2}m^{k-2}t^2d^2 + \dots + kmt^{k-1}d^{k-1} + t^kd^k = \\ &= m^k + d \cdot \left(km^{k-1}t + \binom{k}{2}m^{k-2}t^2d + \dots + kmt^{k-1}d^{k-2} + t^kd^{k-1} \right) = \\ &= m^k + d \cdot M = a + nd + dM = a + d(n + M). \end{aligned}$$

Keďže M (výraz vo veľkej zátvorke) je zjavne prírodné číslo, $(m + td)^k = a + d(n + M)$ je členom postupnosti (*) pre každé prírodné t . Takže (*) obsahuje nekonečne veľa k -tych mocnín.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Dokážte, že medzi číslami tvaru $8n + 4$ sa nachádza nekonečne veľa druhých mocnín prírodných čísel.
- N2. Dokážte, že medzi číslami tvaru $8n + 4$ sa nenachádza žiadna tretia mocnina prírodného čísla.
- N3. Dokážte tvrdenie z časti d) pre prípad $k = 2$, t.j. dokážte, že postupnosť (*) buď neobsahuje žiadnu druhú mocninu, alebo obsahuje nekonečne veľa druhých mocnín prírodných čísel.
- N4. Dokážte, že ak dve čísla dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok, tak aj ich k -te mocniny dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok. [Ak $d \mid a - b$, tak aj $d \mid (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1}) = a^k - b^k$. Inou možnosťou je tvrdenie dokázať pomocou binomickej vety.]
- D1. Rozhodnite, či existuje aritmetická postupnosť, ktorá neobsahuje žiadne Fibonacciho číslo (t.j. číslo, ktoré je členom postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pričom $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pre $n \geq 1$).

5. V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:

- a) na 8 kôpok po 251 minciach,
- b) na 251 kôpok po 8 minciach.

(Radek Horenský)

Riešenie. Očíslujme si zaradom vrcholy daného mnohouholníka číslami od 1 po 2008.

a) Po chvíli nájdeme postup, ako presúvať mince, aby sme došli k zadanému cieľu. Popíšeme jednu z možností.

Mince z vrcholov 1, 2, ..., 251 postupne zhromaždíme na jednej kôpke vo vrchole s číslom 251. Ich pohyb budeme vyvažovať presúvaním mincí z vrcholov 1758 až 2008 do vrcholu s číslom 1758. Takto vytvoríme dve kôpky po 251 minciach. Podobným spôsobom zhromaždíme mince z vrcholov s číslami 252 až 502 na jednej kôpke vo vrchole s číslom 502. Ich pohyb vyvážíme vytvorením rovnako početnej kôpky vo vrchole s číslom 1507. Takto postupujeme aj ďalej; posledné dve kôpky s 251 mincami budú vo vrchole s číslami 1004 a 1005.

b) Postup spĺňajúci pravidlá presunu mincí sa nájsť nedá, čo v ďalšom dokážeme.

Priradme každej minci číslo vrcholu, v ktorom sa nachádza. Všimnime si súčet S všetkých čísel priradených minciam. Čo sa stane, keď presunieme dvojicu mincí? Ak presun nenastane medzi dvoma vrcholmi s číslami 1 a 2008, hodnota súčtu S sa nezmení: jednej z presúvaných mincí sa priradené číslo o 1 zväčší a druhej sa o 1 zmenší. Ak medzi vrcholmi s číslami 1 a 2008 presun nastane, hodnota S sa buď nezmení (vtedy, keď sa obe mince presúvajú medzi týmito vrcholmi, teda si len navzájom vymenia pozície), alebo sa zmení o 2008 (môže vzrásť alebo klesnúť). Celkovo to môžeme zhrnúť tak, že zvyšok súčtu S po delení číslom 2008 sa pri presunoch mincí nemení.

Hodnota S je na začiatku $1 + 2 + \dots + 2008 = 1004 \cdot 2009$. Toto číslo dáva po delení číslom 8 zvyšok 4. Na konci máme 251 kôpok po 8 mincí. Každá z kôpok prispieva do S násobkom čísla 8, preto hodnota S by mala byť na konci deliteľná číslom 8. Zvyšok hodnoty S po delení číslom 8 sa však nemení, lebo $8 \nmid 2008$. Zvyšky hodnoty S po delení 8 sú rôzne pre úvodnú a cieľovú pozíciu, čiže popísanými presunmi mincí nemôžeme dosiahnuť z úvodnej pozície pozíciu s 251 kôpkami po 8 mincí.

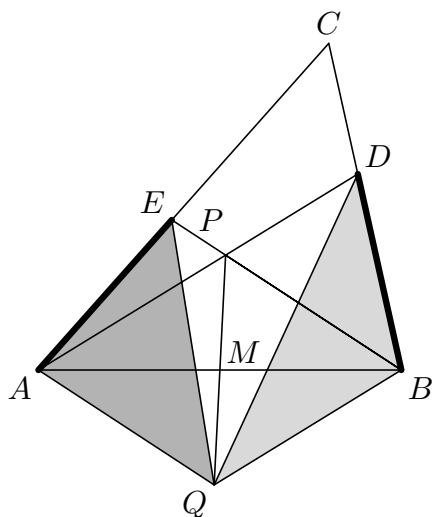
NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. Na stole je n pohárov otočených hore dnom. V jednom kroku môžeme otočiť k z nich naopak. Je možné dosiahnuť, aby po konečnom počte krokov boli všetky poháre otočené dole dnom? Vyhľadajte túto úlohu pre $n = 9, k = 2$ a $n = 9, k = 5$. Odpovede dôsledne zdôvodnite. [Pre $n = 9$ a $k = 5$ to je možné. Pre $n = 9$ a $k = 2$ nie, pretože sa nemení parita počtu pohárov otočených hore dnom.]
- N2. V každom vrchole štvorca je jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom postupne premiestniť všetky mince do jedného vrcholu. [Podobne ako v riešení súťažnej úlohy budeme uvažovať zvyšok súčtu čísel priradených minciam po delení štyrmi. Je možné rozdeliť všetky možné pozície do skupín podľa tohto zvyšku, úvodná a cieľová pozícia sú v rôznych skupinách, preto sa z jednej nedá dostať do druhej.]
- N3. Vyhľadajte predchádzajúcu návodnú úlohu s pravidelným osemuholníkom namiesto štvorca.
- D1. Okolo ohňa sedí $n+1$ psov ($n \geq 1$). Jeden z nich je šéf a má n kostí, ostatní nemajú nič. V jednom kroku zvolíme dvoch psov A a B (nie nutne rôznych), z ktorých každý má aspoň jednu kosť a spolu majú aspoň dve kosti. Zoberieme jednu kosť psovi A a dáme ju jednému zo susedov psa B a zoberieme jednu kosť psovi B a dáme ju jednému zo susedov psa A . Pre ktoré n sa po sérii vhodných krokov môžeme dostať do situácie, že každý pes okrem šéfa má jednu kosť? [KMS 2005/6, 3. zimná séria, úloha 7]
- D2. Okolo okrúhleho stola sedí n detí. Erika je z nich najstaršia a má n cukríkov. Ostatné deti nemajú žiadne cukríky. Erika sa rozhodla, že cukríky rozdelí a stanovila nasledovné pravidlá. V každom kole zdvihnú ruky všetky deti, ktoré majú pri sebe aspoň dva cukríky. Erika jedného z prihlásených vyberie a ten dá každému svojmu susedovi jeden cukrík. (V prvom kole sa teda prihlási iba Erika a dá svojim susedom po cukríku.) Zistite, pre ktoré $n \geq 3$ môže delenie po konečnom počte kôl skončiť tak, že každé dieťa bude mať práve jeden cukrík. [C-P-S trojstretnutie 2006/2]
- D3. Čísla $1, 2, \dots, n$ sú v tomto poradí napísané vo vrcholoch pravidelného n -uholníka. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla nahradiť ich aritmetickým priemerom. Je možné dosiahnuť, aby boli všetky napísané čísla rovnaké? [KMS 2006/7, 2. letná séria, úloha 10]

6. Daný je trojuholník ABC . Vnútri strán AC, BC sú dané body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M stred strany AB a P priesečník priamok AD a BE . Dokážte, že obraz bodu P v stredovej súmernosti so stredom M leží na osi uhla ACB .

(Ján Mazák)

Riešenie. Nech Q je obrazom bodu P v stredovej súmernosti so stredom M . Bod Q leží na osi uhla ACB práve vtedy, keď je rovnako vzdialený od priamok AC a BC .

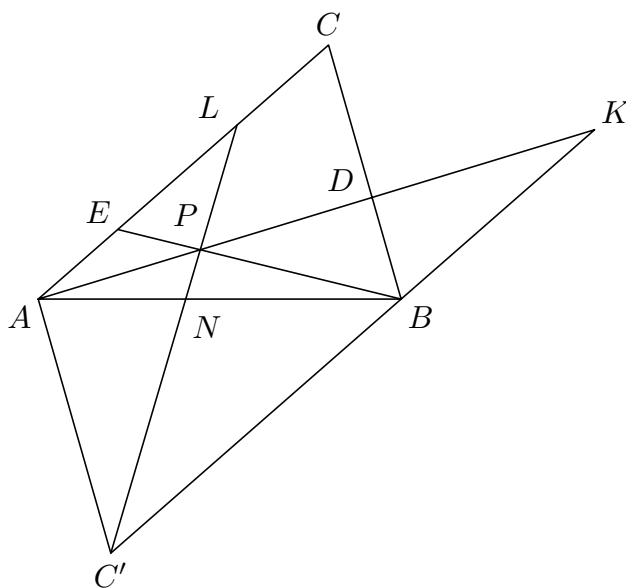


Obr. 3

Chceme využiť rovnosť dĺžok úsekov AE a BD v súvislosti s bodom Q . Všimnime si preto trojuholníky AEQ a BDQ (obr. 3). Bod Q je rovnako vzdialený od priamok AC a BC práve vtedy, keď trojuholníky AEQ a BDQ majú rovnaký obsah. Dokážeme tvrdenie o rovnosti obsahov týchto trojuholníkov.

Priamka BQ je rovnobežná s priamkou AD , pretože je jej obrazom v stredovej súmernosti so stredom M . Preto trojuholníky QBD a QBA majú rovnaký obsah (majú rovnaké výšky na spoločnú základňu QB). Podobne aj obsah trojuholníka QAE je rovnaký, ako obsah trojuholníka QAB . Takže náš dôkaz je hotový.

Iné riešenie. V zadaní sa spomína stredová súmernosť so stredom M . Takáto súmernosť často pomáha v úlohách týkajúcich sa ťažníc trojuholníka. Poďme ju využiť aj tu. Nech sa v tejto stredovej súmernosti zobrazí bod C do bodu C' a bod P do bodu Q . Ďalej označíme K priesečník priamok $C'B$ a AD . Priesečníky priamky $C'P$ s priamkami AB a AC označíme N a L (obr. 4).



Obr. 4

Máme dokázať, že bod Q leží na osi uhla ACB . Vďaka vlastnostiam stredovej súmernosti toto platí práve vtedy, keď bod P leží na osi uhla $AC'B$ (vnútorného v trojuholníku $AC'B$). Je známe (pozri druhú návodnú úlohu), že toto je pravda práve vtedy, keď bod N rozdelí úsečku AB v pomere dĺžok úsečiek AC a BC . Naším cieľom preto bude určiť veľkosť pomeru $AN : BN$. Nech $|BD| = |AE| = x$, $|CD| = y$ a $|AC| = b$.

Trojuholníky ADC a KDB sú podobné, preto

$$|BK| = |AC| \cdot \frac{|BD|}{|CD|} = b \cdot \frac{x}{y}.$$

Rovnoľahlosť rovnobežných priamok BC' a AC so stredom v bode P zachováva pomery, preto

$$|LE| = |AE| \cdot \frac{|C'B|}{|KB|} = x \cdot \frac{b}{b \cdot \frac{x}{y}} = y.$$

Nakoniec, trojuholníky ANL a BNC' sú podobné, z čoho dostaneme

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AL|}{|BC'|} = \frac{|AE| + |LE|}{|BC'|} = \frac{x + y}{|BC'|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}.$$

Platnosť tejto rovnosti znamená, že priamka $C'N$, a teda aj priamka $C'P$, je osou uhla $AC'B$.

NÁVODNÉ A DOPĽŇAJÚCE ÚLOHY:

- N1. a) Nájdite množinu bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od dvoch daných priamok.
b) S využitím vlastnosti z a) dokážte, že osi vnútorných uhlov trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
- N2. Dokážte, že os vnútorného uhla v trojuholníku pretína protilahlú stranu v pomere príslušných strán. [Nech K je priesečník osi uhla ACB so stranou AB . Použijeme sinusovú vetu v trojuholníkoch CKA a CKB , využijeme, že uhly ACK a BCK sú doplnkové a uhly ACK a BCK majú rovnakú veľkosť. Iné riešenie: pomer $|AK| : |BK|$ je rovnaký, ako pomer obsahov trojuholníkov AKC a BKC , pritom tieto dva trojuholníky majú rovnako dlhé výšky z vrcholu K .]
- N3. Daný je trojuholník ABC . Nájdite množinu bodov X takých, že trojuholník ABX má rovnaký obsah ako trojuholník ABC . [Dvojica priamok rovnobežných s priamkou AB a rovnako od nej vzdialených.]
- N4. Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD . Dokážte, že priesečník priamok AC a BD , priesečník priamok AD a BC a stredy základní tohto lichobežníka ležia na priamke. [Uvažujme rovnolehlosti, ktoré zobrazia úsečku AB na úsečku CD . Tieto rovnolehlosti sú dve a ich stredmi sú tie dva priesečníky zo zadania úlohy. Obe tieto rovnolehlosti zachovávajú pomery, preto zobrazia stred úsečky AB na stred úsečky CD . Takže stredy uvažovaných rovnolehlostí ležia na spojnici stredov základní.]
- N5. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Stredy jeho strán označíme postupne K, L, M, N .
a) Dokážte, že $KLMN$ je rovnobežník.
b) Aký je pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$?
- D1. Dokážte, že ťažnice v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode a rozdelia trojuholník na 6 častí s rovnakým obsahom.
- D2. Dokážte, že ak x, y, z sú dĺžky ťažníc trojuholníka ABC , tak existuje trojuholník s dĺžkami strán rovnými x, y, z . Aký obsah má tento trojuholník, ak obsah trojuholníka ABC je S ? [Využite stredovú súmernosť podľa stredy strany BC .]
- D3. Je daný trojuholník ABC . Vnútri jeho strán BC, CA, AB uvažujme postupne body K, L, M také, že úsečky AK, BL, CM sa pretínajú v bode U . Ak trojuholníky AMU a KCU majú obsah P a trojuholníky MBU a CLU obsah Q , potom $P = Q$. Dokážte.

[49-A-S-2]

- D4. Daný je trojuholník ABC a body K, L, M ležiace postupne vnútri strán BC, CA, AB tak, že priamky AK, BL, CM majú spoločný bod X .
- a) Dokážte, že pomer $|AM|:|BM|$ je rovnaký, ako pomer obsahov trojuholníkov ACX a BCX .
- b) Dokážte, že

$$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} = 1.$$

(Toto tvrdenie je časťou *Cevovej vety*. Porovnajte túto vetu s *Menelaovou vetou*. Všimnite si, že často je výhodné vo výpočtoch i dôkazoch previesť pomer vzdialeností na pomer obsahov. Použite tento prístup v druhej návodnej úlohe.)

- D5. Nech K, L, M sú po rade vnútorné body strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC také, že kružnice vpísané dvojiciam trojuholníkov ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM majú vonkajší dotyk. Potom sa priamky AK, BL, CM pretínajú v jednom bode. Dokážte. [49-A-I-2]
- D6. Určte všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$ s nasledujúcou vlastnosťou: Vnútri štvoruholníka $ABCD$ existuje bod E taký, že každá priamka, ktorá prechádza týmto bodom a pretína strany AB a CD vo vnútorných bodoch, delí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Svoju odpoveď zdôvodnite. [49-A-II-4]